EllipticTheta1

Notations

Traditional name

Jacobi theta function ϑ_1

Traditional notation

$\vartheta_1(z, q)$

Mathematica StandardForm notation

`EllipticTheta[1, z, q]`

Primary definition

09.01.02.0001.01

$$\vartheta_1(z, q) = 2 \sqrt[4]{q} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k q^{k(k+1)} \sin((2k+1)z) /; |q| < 1$$

Specific values

Specialized values

For fixed *z*

09.01.03.0001.01

$$\vartheta_1(z, 0) = 0$$

For fixed *q*

09.01.03.0002.01

$$\vartheta_1(0, q) = 0$$

09.01.03.0005.01

$$\vartheta_1\left(-\frac{\pi}{2}, q\right) = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt[4]{q^{-1}(q)} \sqrt{K\left(q^{-1}(q)\right)}$$

09.01.03.0006.01

$$\vartheta_1\left(\frac{\pi}{2}, q\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt[4]{q^{-1}(q)} \sqrt{K\left(q^{-1}(q)\right)}$$

09.01.03.0003.01

$$\vartheta_1\left(\frac{\pi}{2}(2m+1), q\right) = (-1)^m \vartheta_2(0, q) /; m \in \mathbb{Z}$$

09.01.03.0007.01

$$\vartheta_1\left(\pi\left(m+\frac{1}{2}\right), q\right) == (-1)^m \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt[4]{q^{-1}(q)} \sqrt{K\left(q^{-1}(q)\right)} \text{ /; } m \in \mathbb{Z}$$

09.01.03.0008.01

$$\vartheta_1(m\,\pi, q) == 0 \text{ /; } m \in \mathbb{Z}$$

09.01.03.0004.01

$$\vartheta_1(m\,\pi + n\,\pi\,\tau, q) == 0 \text{ /; } \{m, n\} \in \mathbb{Z} \bigwedge q == e^{i\,\pi\,\tau}$$

General characteristics

Domain and analyticity

$\vartheta_1(z, q)$ is an analytic function of z and q for $z, q \in \mathbb{C}$ and $|q| < 1$.

09.01.04.0001.01

$$(1 * z * q) \longrightarrow \vartheta_1(z, q) :: (\{1\} \otimes \mathbb{C} \otimes \mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}$$

Symmetries and periodicities

Parity

$\vartheta_1(z, q)$ is an odd function with respect to z.

09.01.04.0002.01

$$\vartheta_1(-z, q) == -\vartheta_1(z, q)$$

09.01.04.0003.01

$$\vartheta_1(z, -q) == \exp\left(-\frac{i\,\pi}{4} \operatorname{sgn}(\operatorname{Im}(q))\right) \vartheta_1(z, q)$$

Mirror symmetry

09.01.04.0004.01

$$\vartheta_1(\bar{z}, \bar{q}) == \overline{\vartheta_1(z, q)}$$

Periodicity

The function $\vartheta_1(z, q)$ is a periodic function with respect to z with period $2\,\pi$ and a quasi-period $i \log(q)$.

09.01.04.0005.01

$$\vartheta_1(z + \pi, q) == -\vartheta_1(z, q)$$

09.01.04.0022.01

$$\vartheta_1(z + 2\,\pi, q) == \vartheta_1(z, q)$$

09.01.04.0006.01

$$\vartheta_1(z + m\,\pi, q) == (-1)^m \vartheta_1(z, q) \text{ /; } m \in \mathbb{Z}$$

09.01.04.0007.01

$$\vartheta_1(z + \pi\,\tau, q) == -\frac{e^{-2\,i\,z}}{q} \vartheta_1(z, q) \text{ /; } q == e^{i\,\pi\,\tau} \bigwedge \operatorname{Im}(\tau) > 0$$

09.01.04.0008.01

$$\vartheta_1(z + i \log(q), q) = -\frac{e^{2 i z}}{q} \vartheta_1(z, q)$$

09.01.04.0009.01

$$\vartheta_1(z + m \pi \tau, q) = (-1)^m q^{-m} e^{-i (2 m z + (m-1) m \pi \tau)} \vartheta_1(z, q) /; m \in \mathbb{Z} \bigwedge q = e^{i \pi \tau}$$

09.01.04.0010.01

$$\vartheta_1(z + i m \log(q), q) = (-1)^m q^{-m^2} e^{2 m i z} \vartheta_1(z, q) /; m \in \mathbb{Z}$$

09.01.04.0011.01

$$\vartheta_1(z + m \pi + n \pi \tau, q) = (-1)^{m+n} q^{-n^2} e^{-2 n z i} \vartheta_1(z, q) /; \{m, n\} \in \mathbb{Z} \bigwedge q = e^{i \pi \tau}$$

Poles and essential singularities

With respect to *q*

The function $\vartheta_1(z, q)$ does not have poles and essential singularities inside of the unit circle $|q| < 1$.

09.01.04.0012.01

$$\mathcal{S}ing_q(\vartheta_1(z, q)) = \{\}$$

With respect to *z*

09.01.04.0013.01

$$\mathcal{S}ing_z(\vartheta_1(z, q)) = \{\}$$

Branch points

With respect to *q*

For fixed z, the function $\vartheta_1(z, q)$ has one branch point: $q = 0$. (The point $q = -1$ is the branch cut endpoint.)

09.01.04.0014.01

$$\mathcal{BP}_q(\vartheta_1(z, q)) = \{0\}$$

09.01.04.0015.01

$$\mathcal{R}_q(\vartheta_1(z, q), 0) = 4$$

With respect to *z*

For fixed q, the function $\vartheta_1(z, q)$ does not have branch points.

09.01.04.0016.01

$$\mathcal{BP}_z(\vartheta_1(z, q)) = \{\}$$

Branch cuts

With respect to *q*

For fixed z, the function $\vartheta_1(z, q)$ is a single-valued function inside the unit circle of the complex q-plane, cut along the interval $(-1, 0)$, where it is continuous from above.

09.01.04.0017.01

$$\mathcal{BC}_q(\vartheta_1(z, q)) = \{\{(-1, 0), -i\}\}$$

09.01.04.0018.01

$$\lim_{\epsilon\to+0} \vartheta_1(z, q + i\,\epsilon) = \vartheta_1(z, q) \;/;\; -1 < q < 0$$

09.01.04.0019.01

$$\lim_{\epsilon\to+0} \vartheta_1(z, q - i\,\epsilon) = -i\,\vartheta_1(z, q) \;/;\; -1 < q < 0$$

With respect to *z*

For fixed q, the function $\vartheta_1(z, q)$ does not have branch cuts.

09.01.04.0020.01

$$\mathcal{BC}_z(\vartheta_1(z, q)) = \{\}$$

Natural boundary of analyticity

The unit circle $|q| = 1$ is the natural boundary of the region of analyticity.

09.01.04.0021.01

$$\mathcal{AB}_z(\vartheta_1(q, z)) = \left\{e^{i\,(-\pi,\pi)}\right\}$$

Branch cut endpoints

The function $\vartheta_1(z, q)$ has one branch cut endpoint: $q = -1$.

Series representations

q-series

Expansions at generic point $z = z_0$

09.01.06.0027.01

$$\vartheta_1(z, q) \propto \vartheta_1(z_0, q) + \vartheta_1^{(1,0)}(z_0, q)\,(z - z_0) + \frac{\vartheta_1^{(2,0)}(z_0, q)}{2}\,(z - z_0)^2 + \frac{\vartheta_1^{(3,0)}(z_0, q)}{6}\,(z - z_0)^3 + O\!\left((z - z_0)^4\right)$$

09.01.06.0028.01

$$\vartheta_1(z, q) \propto \vartheta_1(z_0, q) + \vartheta_1'(z_0, q)\,(z - z_0) + \frac{\vartheta_1^{(2,0)}(z_0, q)}{2}\,(z - z_0)^2 + \frac{\vartheta_1^{(3,0)}(z_0, q)}{6}\,(z - z_0)^3 + O\!\left((z - z_0)^4\right)$$

09.01.06.0029.01

$$\vartheta_1(z, q) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\vartheta_1^{(k,0)}(z_0, q)}{k!}\,(z - z_0)^k$$

09.01.06.0030.01

$$\vartheta_1(z, q) \propto \vartheta_1(z_0, q)\,(1 + O(z - z_0))$$

Expansions at generic point $q = q_0$

09.01.06.0031.01

$$\vartheta_1(z, q) \propto \vartheta_1(z, q_0) + \vartheta_1^{(0,1)}(z, q_0)\,(q - q_0) + \frac{\vartheta_1^{(0,2)}(z, q_0)}{2}\,(q - q_0)^2 + \frac{\vartheta_1^{(0,3)}(z, q_0)}{6}\,(q - q_0)^3 + O\!\left((q - q_0)^4\right)$$

09.01.06.0032.01

$$\vartheta_1(z, q) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\vartheta_1^{(0,k)}(z, q_0)}{k!} (q - q_0)^k$$

09.01.06.0033.01

$$\vartheta_1(z, q) \propto \vartheta_1(z, q_0) (1 + O(q - q_0))$$

Expansions on branch cuts

09.01.06.0034.01

$$\vartheta_1(z, q) \propto e^{\frac{\pi i}{2} \left\lfloor \frac{\arg(q-x)}{2\pi} \right\rfloor} \left(\vartheta_1(z, x) + \vartheta_1^{(0,1)}(z, x) (q - x) + \frac{\vartheta_1^{(0,2)}(z, x)}{2} (q - x)^2 + \frac{\vartheta_1^{(0,3)}(z, x)}{6} (q - x)^3 + O\left((q - x)^4\right) \right) /;$$
$$x \in \mathbb{R} \land -1 < x < 0$$

09.01.06.0035.01

$$\vartheta_1(z, q) = e^{\frac{\pi i}{2} \left\lfloor \frac{\arg(q-x)}{2\pi} \right\rfloor} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\vartheta_1^{(0,k)}(z, x)}{k!} (q - x)^k /; x \in \mathbb{R} \land -1 < x < 0$$

09.01.06.0036.01

$$\vartheta_1(z, q) \propto e^{\frac{\pi i}{2} \left\lfloor \frac{\arg(q-x)}{2\pi} \right\rfloor} \vartheta_1(z, x) (1 + O(q - x)) /; x \in \mathbb{R} \land -1 < x < 0$$

Expansions at $q == 0$

09.01.06.0037.01

$$\vartheta_1(z, q) \propto 2 \sqrt[4]{q} \left(\sin(z) - \sin(3 z) q^2 + \sin(5 z) q^6 - \sin(7 z) q^{12} + \ldots\right) /; (q \to 0)$$

09.01.06.0001.01

$$\vartheta_1(z, q) == 2 \sqrt[4]{q} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k q^{k(k+1)} \sin((2 k + 1) z) /; |q| < 1$$

09.01.06.0002.01

$$\vartheta_1(z, q) == -i \sqrt[4]{q} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k q^{k(k+1)} e^{(2 k+1) i z} /; |q| < 1$$

09.01.06.0038.01

$$\vartheta_1(z, q) \propto 2 \sqrt[4]{q} \left(\sin(z) + O\left(q^2\right)\right) /; (q \to 0)$$

Expansions at $q == 1$

09.01.06.0039.01

$$\vartheta_1(z, q) \propto \frac{2 i \sqrt{\pi}}{\sqrt{q - 1}} e^{-i \pi \left\lfloor -\frac{\arg(q-1)}{2\pi} \right\rfloor} \left(1 + \frac{q - 1}{4} - \frac{7}{96} (q - 1)^2 + \ldots\right) e^{\frac{4 z^2 + \pi^2}{4 \log(q)}} \left(\sinh\left(\frac{\pi z}{\log(q)}\right) - e^{\frac{2\pi^2}{\log(q)}} \sinh\left(\frac{3 \pi z}{\log(q)}\right) + \ldots\right) /;$$
$$(q \to 1) \bigwedge |q| < 1$$

09.01.06.0040.01

$$\vartheta_1(z, q) = \frac{2 i \sqrt{\pi}}{\sqrt{q - 1}} e^{-i \pi \left\lfloor -\frac{\arg(q-1)}{2\pi} \right\rfloor} e^{\frac{4 z^2 + \pi^2}{4 \log(q)}} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k + \frac{1}{2}}{k} \sum_{j=0}^{k} \frac{(-1)^j}{2 j + 1} \binom{k}{j} p_{j,k} (q - 1)^k \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m e^{\frac{m (m+1) \pi^2}{\log(q)}} \sinh\left(\frac{(2 m + 1) \pi z}{\log(q)}\right) /;$$
$$(|q| < 1 \land |q - 1| < 1) \bigwedge c_k = \frac{(-1)^{k-1}}{k + 1} \bigwedge p_{j,0} = 1 \bigwedge p_{j,k} = -\frac{1}{k} \sum_{m=1}^{k} (j m - k + m) c_m p_{j,k-m} \bigwedge k \in \mathbb{N}^+$$

09.01.06.0041.01

$$\vartheta_1(z, q) \propto \frac{2\,i\,\sqrt{\pi}}{\sqrt{q-1}}\, e^{-i\pi\left\lfloor -\frac{\arg(q-1)}{2\pi}\right\rfloor} (1 + O(q-1))\, e^{\frac{4z^2+\pi^2}{4\log(q)}} \left(\sinh\left(\frac{\pi z}{\log(q)}\right) + O\left(e^{\frac{2\pi^2}{\log(q)}} \sinh\left(\frac{3\pi z}{\log(q)}\right)\right)\right) /;\ |q| < 1$$

Other q-series representations

09.01.06.0003.01

$$\frac{\vartheta_1'(z, q)}{\vartheta_1(z, q)} == \cot(z) + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q^{2k}}{1-q^{2k}} \sin(2kz)$$

09.01.06.0004.01

$$\log\left(\frac{\vartheta_1(a+b, q)}{\vartheta_1(a-b, q)}\right) == \log\left(\frac{\sin(a+b)}{\sin(a-b)}\right) + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \frac{q^{2k}}{1-q^{2k}} \sin(2ka)\sin(2kb)$$

09.01.06.0005.01

$$\log(\vartheta_1(z, q)) == \log(\vartheta_1'(0, q)) + \log(\sin(z)) + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q^{2k}}{k\left(1-q^{2k}\right)} \sin^2(kz)$$

09.01.06.0006.01

$$\frac{\vartheta_1'(0, q)\,\vartheta_1(a+b, q)}{4\,\vartheta_1(a, q)\,\vartheta_1(b, q)} == \frac{1}{4}(\cot(a) + \cot(b)) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q^{2k}\sin(2(ka+b)) - q^{4k}\sin(2ka)}{1 - 2\cos(2b)\,q^{2k} + q^{4k}} /;\ |\mathrm{Im}(a)| < \mathrm{Im}(\tau) \bigwedge q == e^{i\pi\tau}$$

09.01.06.0007.01

$$\frac{\vartheta_1'(0, q)\,\vartheta_1(a+b, q)}{4\,\vartheta_3(a, q)\,\vartheta_3(b, q)} == \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{\sin((2k-1)a+b)\,q^{k-\frac{1}{2}} + \sin((2k-1)a-b)\,q^{3k-\frac{3}{2}}}{1 + q^{4k-2} + 2\cos(2b)\,q^{2k-1}} /;\ |\mathrm{Im}(a)| < \mathrm{Im}(\tau) \bigwedge q == e^{i\pi\tau}$$

09.01.06.0008.01

$$\frac{\vartheta_1'(0, q)\,\vartheta_1(a+b, q)}{4\,\vartheta_1(a, q)\,\vartheta_1(b, q)} == \frac{1}{4}(\cot(a) + \cot(b)) + \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} q^{2mk} \sin(2am + 2bk) /;\ |\mathrm{Im}(a)| < \mathrm{Im}(\tau) \bigwedge |\mathrm{Im}(b)| < \mathrm{Im}(\tau) \bigwedge q == e^{i\pi\tau}$$

09.01.06.0009.01

$$\frac{\vartheta_1'(0, q)\,\vartheta_1(a+b, q)}{4\,\vartheta_3(a, q)\,\vartheta_3(b, q)} == \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{m+k} q^{\frac{1}{2}(2m-1)(2k-1)} \sin((2m-1)a + (2k-1)b) /;$$

$$|\mathrm{Im}(a)| < \mathrm{Im}(\tau) \bigwedge |\mathrm{Im}(b)| < \mathrm{Im}(\tau) \bigwedge q == e^{i\pi\tau}$$

09.01.06.0010.01

$$\frac{\vartheta_1'(0, q)\,\vartheta_1(z, q)}{4\,\vartheta_2(0, q)\,\vartheta_2(z, q)} == \frac{\tan(z)}{4} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{q^{2k}}{1+q^{2k}} \sin(2kz) /;\ |\mathrm{Im}(z)| < \mathrm{Im}(\tau) \bigwedge q == e^{i\pi\tau}$$

09.01.06.0011.01

$$\frac{\vartheta_1'(0, q)\,\vartheta_1(z, q)}{4\,\vartheta_2(0, q)\,\vartheta_2(z, q)} == \frac{\tan(z)}{4} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k\left(q^{2k}\sin(2z)\right)}{1 + 2\cos(2z)\,q^{2k} + q^{4k}} /;\ |\mathrm{Im}(z)| < \mathrm{Im}(\tau) \bigwedge q == e^{i\pi\tau}$$

09.01.06.0012.01

$$\frac{\vartheta_1'(0, q)\,\vartheta_3(z, q)}{4\,\vartheta_3(0, q)\,\vartheta_1(z, q)} == \frac{1}{4}\csc(z) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q^{2k-1}}{1+q^{2k-1}} \sin((2k-1)z) /;\ |\mathrm{Im}(z)| < \mathrm{Im}(\tau) \bigwedge q == e^{i\pi\tau}$$

09.01.06.0013.01

$$\frac{\vartheta_1'(0,q)\,\vartheta_3(z,q)}{4\,\vartheta_3(0,q)\,\vartheta_1(z,q)} == \frac{1}{4}\csc(z) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\left(1+q^{2k}\right) q^k \sin(z)\right)}{1-2\cos(2z)\,q^{2k}+q^{4k}} \;/;\; |\mathrm{Im}(z)| < \mathrm{Im}(\tau) \bigwedge q == e^{i\pi\tau}$$

09.01.06.0014.01

$$\frac{\vartheta_1'(0,q)\,\vartheta_1(z,q)}{4\,\vartheta_3(0,q)\,\vartheta_3(z,q)} == \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{q^{k-\frac{1}{2}}}{1+q^{2k-1}} \sin((2k-1)z) \;/;\; |\mathrm{Im}(z)| < \frac{1}{2}\mathrm{Im}(\tau) \bigwedge q == e^{i\pi\tau}$$

09.01.06.0015.01

$$\frac{\vartheta_1'(0,q)\,\vartheta_1(z,q)}{4\,\vartheta_3(0,q)\,\vartheta_3(z,q)} == \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{\left(1-q^{2k-1}\right) q^{k-\frac{1}{2}} \sin(z)}{1+2\cos(2z)\,q^{2k-1}+q^{4k-2}} \;/;\; |\mathrm{Im}(z)| < \frac{1}{2}\mathrm{Im}(\tau) \bigwedge q == e^{i\pi\tau}$$

09.01.06.0016.01

$$\frac{\vartheta_1'(0,q)\,\vartheta_4(z,q)}{4\,\vartheta_4(0,q)\,\vartheta_1(z,q)} == \frac{1}{4}\csc(z) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q^{2k-1}}{1-q^{2k-1}} \sin((2k-1)z) \;/;\; |\mathrm{Im}(z)| < \mathrm{Im}(\tau) \bigwedge q == e^{i\pi\tau}$$

09.01.06.0017.01

$$\frac{\vartheta_1'(0,q)\,\vartheta_4(z,q)}{4\,\vartheta_4(0,q)\,\vartheta_1(z,q)} == \frac{1}{4}\csc(z) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left(1+q^{2k}\right) q^k \sin(z)}{1-2\cos(2z)\,q^{2k}+q^{4k}} \;/;\; |\mathrm{Im}(z)| < \mathrm{Im}(\tau) \bigwedge q == e^{i\pi\tau}$$

09.01.06.0018.01

$$\frac{\vartheta_1'(0,q)\,\vartheta_1(z,q)}{4\,\vartheta_4(0,q)\,\vartheta_4(z,q)} == \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q^{k-\frac{1}{2}}}{1-q^{2k-1}} \sin((2k-1)z) \;/;\; |\mathrm{Im}(z)| < \frac{\mathrm{Im}(\tau)}{2} \bigwedge q == e^{i\pi\tau}$$

09.01.06.0019.01

$$\frac{\vartheta_1'(0,q)\,\vartheta_1(z,q)}{4\,\vartheta_4(0,q)\,\vartheta_4(z,q)} == \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left(1+q^{2k-1}\right) q^{k-\frac{1}{2}} \sin(z)}{1-2\cos(2z)\,q^{2k-1}+q^{4k-2}} \;/;\; |\mathrm{Im}(z)| < \frac{\mathrm{Im}(\tau)}{2} \bigwedge q == e^{i\pi\tau}$$

09.01.06.0020.01

$$\frac{\vartheta_1'(0,q)}{4\,\vartheta_1(z,q)} == \frac{\csc(z)}{4} + \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k q^{k(2m+k-1)} \sin((2k-1)z) \;/;\; |\mathrm{Im}(z)| < \mathrm{Im}(\tau) \bigwedge q == e^{i\pi\tau}$$

09.01.06.0021.01

$$\frac{\vartheta_1'(0,q)}{4\,\vartheta_1(z,q)} == \frac{\csc(z)}{4} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q^{4k}\sin(2kz) - q^{2k}\sin((2k-1)z)}{1-2\cos(z)\,q^{2k}+q^{4k}} \;/;\; |\mathrm{Im}(z)| < \mathrm{Im}(\tau) \bigwedge q == e^{i\pi\tau}$$

09.01.06.0022.01

$$\frac{\vartheta_1'(0,q)}{4\,\vartheta_1(z,q)} == \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q^{2k-1}\sin((2k-2)z) - q^{4k-2}\sin((2k-1)z)}{1-2\cos(2z)\,q^{2k-1}+q^{4k}} \;/;\; |\mathrm{Im}(z)| < \mathrm{Im}(\tau) \bigwedge q == e^{i\pi\tau}$$

09.01.06.0023.01

$$\frac{\vartheta_1'(0,q)}{4\,\vartheta_1(z,q)} == \sin(z) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(q^{k(k+1)} + q^{k(k+3)}\right)}{1-\cos(2z)\,q^{2k}+q^{4k}} \;/;\; |\mathrm{Im}(z)| < \mathrm{Im}(\tau) \bigwedge q == e^{i\pi\tau}$$

09.01.06.0024.01

$$\frac{\vartheta_1'(0,q)^2}{4\,\vartheta_1(z,q)^2} == \frac{\csc^2(z)}{4} - 2\sum_{k=1}^{\infty} k\,q^{2k} \frac{\cos((2k-2)z) - q^{2k}\cos(2kz)}{1-2\cos(2z)\,q^{2k}+q^{4k-2}} \;/;\; |\mathrm{Im}(z)| < \mathrm{Im}(\tau) \bigwedge q == e^{i\pi\tau}$$

Other series representations

09.01.06.0042.01

$$\vartheta_1(z, q) = -\frac{2\sqrt{\pi}}{\sqrt{-\log(q)}} e^{\frac{4z^2+\pi^2}{4\log(q)}} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k e^{\frac{k(k+1)\pi^2}{\log(q)}} \sinh\left(\frac{(2k+1)\pi z}{\log(q)}\right)$$

09.01.06.0025.01

$$\vartheta_1(z, q) = -i \exp\left(-\frac{i z^2}{\pi \tau}\right) \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \exp\left(\pi \tau i \left(n + \frac{1}{2} + \frac{z}{\pi \tau}\right)^2\right) /; q = e^{i \pi \tau}$$

09.01.06.0026.01

$$\vartheta_1(z, q) = \frac{\sqrt{i}}{\sqrt{\tau}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \exp\left(-\frac{\pi i}{\tau} \left(\frac{z}{\pi} + n - \frac{1}{2}\right)^2\right) /; q = e^{i \pi \tau}$$

Product representations

09.01.08.0001.01

$$\vartheta_1(z, q) = 2\sqrt[4]{q} \sin(z) \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - q^{2k}\right)\left(1 - 2q^{2k}\cos(2z) + q^{4k}\right)$$

Differential equations

Ordinary nonlinear differential equations

09.01.13.0001.01

$$w'(z)^2 = \left(\vartheta_2(0, q)^2 - w(z)^2 \vartheta_3(0, q)^2\right)\left(\vartheta_3(0, q)^2 - w(z)^2 \vartheta_2(0, q)^2\right) /; w(z) = \frac{\vartheta_1(z, q)}{\vartheta_4(z, q)}$$

Partial differential equations

The elliptic theta functions satisfy the one-dimensional heat equation:

09.01.13.0002.01

$$\frac{\partial \vartheta_1(z, q)}{\partial \tau} = -\frac{\pi i}{4} \frac{\partial^2 \vartheta_1(z, q)}{\partial z^2} /; q = e^{i \pi \tau}$$

09.01.13.0003.01

$$4q \frac{\partial \vartheta_1(z, q)}{\partial q} + \frac{\partial^2 \vartheta_1(z, q)}{\partial z^2} = 0$$

Transformations

Transformations and argument simplifications

Argument involving basic arithmetic operations

Transformation involving inversion of τ (Jacobi's transformation):

09.01.16.0008.01

$$\vartheta_1(z,q) = \frac{i\sqrt{\pi}\; e^{\frac{4z^2+\pi^2}{4\log(q)}}}{\sqrt[4]{e^{\frac{\pi^2}{\log(q)}}}\;\sqrt{-\log(q)}}\,\vartheta_1\!\left(\frac{i\pi z}{\log(q)},\, e^{\frac{\pi^2}{\log(q)}}\right)$$

09.01.16.0001.01

$$\vartheta_1\!\left(\frac{z}{\tau},\, e^{-\frac{i\pi}{\tau}}\right) = -\frac{\sqrt[4]{e^{-\frac{i\pi}{\tau}}}}{\exp\left(-\frac{i\pi}{4\tau}\right)}\, i\sqrt{-i\tau}\,\exp\!\left(\frac{i z^2}{\pi\tau}\right)\vartheta_1(z,q)\;/;\; q = e^{i\pi\tau}$$

n -th root of q:

09.01.16.0002.01

$$\vartheta_1\!\left(z,q^{1/n}\right) = \left(\prod_{r=1}^{\infty}\frac{1-q^{\frac{2r}{n}}}{\left(1-q^{2r}\right)^n}\right)\prod_{r=-\frac{n-1}{2}}^{\frac{n-1}{2}}\vartheta_1\!\left(z+\frac{r\pi\tau}{n},\, q\right)\;/;\; \frac{n+1}{2}\in\mathbb{Z}^+ \bigwedge q = e^{i\pi\tau}$$

multiple angle formulas:

09.01.16.0003.01

$$\vartheta_1(n z, q^n) = \frac{\sqrt[4]{q^n}}{q^{n/4}}\left(\prod_{r=1}^{\infty}\frac{1-q^{2nr}}{\left(1-q^{2r}\right)^n}\right)\prod_{r=0}^{n-1}\vartheta_1\!\left(z+\frac{\pi r}{n},\, q\right)\;/;\; n\in\mathbb{Z}^+$$

09.01.16.0004.01

$$\vartheta_1(n z, q^n) = (-1)^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}\frac{\sqrt[4]{q^n}}{q^{n/4}}\left(\prod_{r=1}^{\infty}\frac{1-q^{2nr}}{\left(1-q^{2r}\right)^n}\right)\prod_{r=\left\lfloor-\frac{n-1}{2}\right\rfloor}^{\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor}\vartheta_1\!\left(z+\frac{r\pi}{n},\, q\right)\;/;\; n\in\mathbb{Z}^+$$

09.01.16.0005.01

$$\frac{\vartheta_1\!\left(\pi\left((n-1)z+\frac{1}{2}\right),\, e^{i\pi\tau}\right)}{\vartheta_1\!\left(\pi\left(z+\frac{1}{2}\right),\, e^{i\pi\tau}\right)} = \left(\prod_{k=1}^{n-1}\frac{\vartheta_1\!\left(\pi\left(n z+k\tau+\frac{1}{2}\right),\, e^{i n\pi\tau}\right)}{\vartheta_1\!\left(\pi\left(k\tau+\frac{1}{2}\right),\, e^{i n\pi\tau}\right)}\right)\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\vartheta(k\tau,\, n\tau)\, e^{\left(n^2-n-2k\right)i\pi z}}{\vartheta(n z+k\tau,\, n\tau)}\;/;\; \operatorname{Im}(\tau)>0\land n\in\mathbb{N}$$

09.01.16.0006.01

$$\frac{\vartheta_1\!\left((n-1)\pi z,\, e^{i\pi\tau}\right)}{\vartheta_1\!\left(\pi z,\, e^{i\pi\tau}\right)} = \left(\prod_{k=1}^{n-1}\frac{\vartheta_1\!\left(\pi(n z+k\tau),\, e^{i n\pi\tau}\right)}{\vartheta_1\!\left(k\pi\tau,\, e^{i n\pi\tau}\right)}\right)\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\vartheta(k\tau,\, n\tau)\, e^{\left(n^2-n-2k\right)i\pi z}}{\vartheta(n z+k\tau,\, n\tau)}\;/;\; \operatorname{Im}(\tau)>0\land n\in\mathbb{N}$$

09.01.16.0007.01

$$\frac{\vartheta_1\!\left(\pi\left((n-1)z-\frac{1}{2}\right),\, e^{i\pi\tau}\right)}{\vartheta_1\!\left(\pi\left(z-\frac{1}{2}\right),\, e^{i\pi\tau}\right)} = \left(\prod_{k=1}^{n-1}\frac{\vartheta_1\!\left(\pi\left(n z+k\tau-\frac{1}{2}\right),\, e^{i n\pi\tau}\right)}{\vartheta_1\!\left(\pi\left(k\tau-\frac{1}{2}\right),\, e^{i n\pi\tau}\right)}\right)\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\vartheta(k\tau,\, n\tau)\, e^{\left(n^2-n-2k\right)i\pi z}}{\vartheta(n z+k\tau,\, n\tau)}\;/;\; \operatorname{Im}(\tau)>0\land n\in\mathbb{N}$$

Identities involving the group of functions

Basic Algebraic Identities

Relations involving squares

09.01.18.0001.01

$$\frac{\vartheta_2(0, z)^2 \vartheta_3(0, z)^2 + \vartheta_1(0, z)^2 \vartheta_4(0, z)^2}{\vartheta_2(0, z)^4 + \vartheta_4(0, z)^4} = \sqrt{q^{-1}(z)}$$

09.01.18.0002.01

$$\vartheta_2(z, q)^2 \vartheta_3(0, q)^2 + \vartheta_4(0, q)^2 \vartheta_1(z, q)^2 = \vartheta_2(0, q)^2 \vartheta_3(z, q)^2$$

09.01.18.0003.01

$$\vartheta_3(0, q)^2 \vartheta_1(z, q)^2 + \vartheta_4(0, q)^2 \vartheta_2(z, q)^2 = \vartheta_2(0, q)^2 \vartheta_4(z, q)^2$$

09.01.18.0004.01

$$\vartheta_2(0, q)^2 \vartheta_1(z, q)^2 + \vartheta_4(0, q)^2 \vartheta_3(z, q)^2 = \vartheta_3(0, q)^2 \vartheta_4(z, q)^2$$

09.01.18.0005.01

$$\vartheta_2(0, q)^2 \vartheta_2(z, q)^2 + \vartheta_4(0, q)^2 \vartheta_4(z, q)^2 = \vartheta_3(0, q)^2 \vartheta_3(z, q)^2$$

09.01.18.0006.01

$$\vartheta_2(0, q)^2 \vartheta_3(z, q)^2 - \vartheta_4(0, q)^2 \vartheta_1(z, q)^2 = \vartheta_3(0, q)^2 \vartheta_2(z, q)^2$$

Relations involving quartic powers

09.01.18.0007.01

$$\vartheta_2(0, q)^4 + \vartheta_4(0, q)^4 = \vartheta_3(0, q)^4$$

09.01.18.0008.01

$$\vartheta_1(z, q)^4 + \vartheta_3(z, q)^4 = \vartheta_2(z, q)^4 + \vartheta_4(z, q)^4$$

Addition theorems

For $\vartheta_1(z, q)$

09.01.18.0009.01

$$\vartheta_2(0, q)^2 \vartheta_1(x+y, q) \vartheta_1(x-y, q) = \vartheta_1(x, q)^2 \vartheta_2(y, q)^2 - \vartheta_2(x, q)^2 \vartheta_1(y, q)^2$$

09.01.18.0010.01

$$\vartheta_2(0, q)^2 \vartheta_1(x+y, q) \vartheta_1(x-y, q) = \vartheta_4(x, q)^2 \vartheta_3(y, q)^2 - \vartheta_3(x, q)^2 \vartheta_4(y, q)^2$$

09.01.18.0011.01

$$\vartheta_3(0, q)^2 \vartheta_1(x+y, q) \vartheta_1(x-y, q) = \vartheta_1(x, q)^2 \vartheta_3(y, q)^2 - \vartheta_3(x, q)^2 \vartheta_1(y, q)^2$$

09.01.18.0012.01

$$\vartheta_3(0, q)^2 \vartheta_1(x+y, q) \vartheta_1(x-y, q) = \vartheta_4(x, q)^2 \vartheta_2(y, q)^2 - \vartheta_2(x, q)^2 \vartheta_4(y, q)^2$$

09.01.18.0013.01

$$\vartheta_4(0, q)^2 \vartheta_1(x+y, q) \vartheta_1(x-y, q) = \vartheta_1(x, q)^2 \vartheta_4(y, q)^2 - \vartheta_4(x, q)^2 \vartheta_1(y, q)^2$$

09.01.18.0014.01

$$\vartheta_4(0, q)^2 \vartheta_1(x+y, q) \vartheta_1(x-y, q) = \vartheta_3(x, q)^2 \vartheta_2(y, q)^2 - \vartheta_2(x, q)^2 \vartheta_3(y, q)^2$$

For $\vartheta_2(z, q)$

09.01.18.0015.01

$$\vartheta_2(0, q)^2 \vartheta_2(x+y, q) \vartheta_2(x-y, q) = \vartheta_2(x, q)^2 \vartheta_2(y, q)^2 - \vartheta_1(x, q)^2 \vartheta_1(y, q)^2$$

09.01.18.0016.01

$$\vartheta_2(0, q)^2 \vartheta_2(x+y, q) \vartheta_2(x-y, q) = \vartheta_3(x, q)^2 \vartheta_3(y, q)^2 - \vartheta_4(x, q)^2 \vartheta_4(y, q)^2$$

09.01.18.0017.01

$$\vartheta_3(0, q)^2 \vartheta_2(x+y, q) \vartheta_2(x-y, q) = \vartheta_2(x, q)^2 \vartheta_3(y, q)^2 - \vartheta_4(x, q)^2 \vartheta_1(y, q)^2$$

09.01.18.0018.01

$$\vartheta_3(0, q)^2 \vartheta_2(x+y, q) \vartheta_2(x-y, q) = \vartheta_3(x, q)^2 \vartheta_2(y, q)^2 - \vartheta_1(x, q)^2 \vartheta_4(y, q)^2$$

09.01.18.0019.01

$$\vartheta_4(0, q)^2 \vartheta_2(x+y, q) \vartheta_2(x-y, q) = \vartheta_2(x, q)^2 \vartheta_4(y, q)^2 - \vartheta_3(x, q)^2 \vartheta_1(y, q)^2$$

09.01.18.0020.01

$$\vartheta_4(0, q)^2 \vartheta_2(x+y, q) \vartheta_2(x-y, q) = \vartheta_4(x, q)^2 \vartheta_2(y, q)^2 - \vartheta_1(x, q)^2 \vartheta_3(y, q)^2$$

For $\vartheta_3(z, q)$

09.01.18.0021.01

$$\vartheta_2(0, q)^2 \vartheta_3(x+y, q) \vartheta_3(x-y, q) = \vartheta_3(x, q)^2 \vartheta_2(y, q)^2 + \vartheta_4(x, q)^2 \vartheta_1(y, q)^2$$

09.01.18.0022.01

$$\vartheta_2(0, q)^2 \vartheta_3(x+y, q) \vartheta_3(x-y, q) = \vartheta_2(x, q)^2 \vartheta_3(y, q)^2 + \vartheta_1(x, q)^2 \vartheta_4(y, q)^2$$

09.01.18.0023.01

$$\vartheta_3(0, q)^2 \vartheta_3(x+y, q) \vartheta_3(x-y, q) = \vartheta_3(x, q)^2 \vartheta_3(y, q)^2 + \vartheta_1(x, q)^2 \vartheta_1(y, q)^2$$

09.01.18.0024.01

$$\vartheta_3(0, q)^2 \vartheta_3(x+y, q) \vartheta_3(x-y, q) = \vartheta_2(x, q)^2 \vartheta_2(y, q)^2 + \vartheta_4(x, q)^2 \vartheta_4(y, q)^2$$

09.01.18.0025.01

$$\vartheta_4(0, q)^2 \vartheta_3(x+y, q) \vartheta_3(x-y, q) = \vartheta_3(x, q)^2 \vartheta_4(y, q)^2 - \vartheta_2(x, q)^2 \vartheta_1(y, q)^2$$

09.01.18.0026.01

$$\vartheta_4(0, q)^2 \vartheta_3(x+y, q) \vartheta_3(x-y, q) = \vartheta_4(x, q)^2 \vartheta_3(y, q)^2 - \vartheta_1(x, q)^2 \vartheta_2(y, q)^2$$

For $\vartheta_4(z, q)$

09.01.18.0027.01

$$\vartheta_2(0, q)^2 \vartheta_4(x+y, q) \vartheta_4(x-y, q) = \vartheta_3(x, q)^2 \vartheta_1(y, q)^2 + \vartheta_4(x, q)^2 \vartheta_2(y, q)^2$$

09.01.18.0028.01

$$\vartheta_2(0, q)^2 \vartheta_4(x+y, q) \vartheta_4(x-y, q) = \vartheta_1(x, q)^2 \vartheta_3(y, q)^2 + \vartheta_2(x, q)^2 \vartheta_4(y, q)^2$$

09.01.18.0029.01

$$\vartheta_3(0, q)^2 \vartheta_4(x+y, q) \vartheta_4(x-y, q) = \vartheta_4(x, q)^2 \vartheta_3(y, q)^2 + \vartheta_2(x, q)^2 \vartheta_1(y, q)^2$$

09.01.18.0030.01

$$\vartheta_3(0, q)^2 \vartheta_4(x+y, q) \vartheta_4(x-y, q) = \vartheta_1(x, q)^2 \vartheta_2(y, q)^2 + \vartheta_3(x, q)^2 \vartheta_4(y, q)^2$$

09.01.18.0031.01

$$\vartheta_4(0, q)^2 \vartheta_4(x+y, q) \vartheta_4(x-y, q) = \vartheta_4(x, q)^2 \vartheta_4(y, q)^2 - \vartheta_1(x, q)^2 \vartheta_1(y, q)^2$$

09.01.18.0032.01

$$\vartheta_4(0, q)^2 \vartheta_4(x+y, q) \vartheta_4(x-y, q) = \vartheta_3(x, q)^2 \vartheta_3(y, q)^2 - \vartheta_2(x, q)^2 \vartheta_2(y, q)^2$$

For mixed pairs

09.01.18.0033.01

$$\vartheta_3(0, q)\,\vartheta_4(0, q)\,\vartheta_1(x+y, q)\,\vartheta_2(x-y, q) = \vartheta_1(x, q)\,\vartheta_2(x, q)\,\vartheta_3(y, q)\,\vartheta_4(y, q) + \vartheta_3(x, q)\,\vartheta_4(x, q)\,\vartheta_1(y, q)\,\vartheta_2(y, q)$$

09.01.18.0034.01

$$\vartheta_2(0, q)\,\vartheta_4(0, q)\,\vartheta_1(x+y, q)\,\vartheta_3(x-y, q) = \vartheta_1(x, q)\,\vartheta_3(x, q)\,\vartheta_2(y, q)\,\vartheta_4(y, q) + \vartheta_2(x, q)\,\vartheta_4(x, q)\,\vartheta_1(y, q)\,\vartheta_3(y, q)$$

09.01.18.0035.01

$$\vartheta_2(0, q)\,\vartheta_3(0, q)\,\vartheta_1(x+y, q)\,\vartheta_4(x-y, q) = \vartheta_1(x, q)\,\vartheta_4(x, q)\,\vartheta_2(y, q)\,\vartheta_3(y, q) + \vartheta_2(x, q)\,\vartheta_3(x, q)\,\vartheta_1(y, q)\,\vartheta_4(y, q)$$

09.01.18.0036.01

$$\vartheta_2(0, q)\,\vartheta_3(0, q)\,\vartheta_2(x+y, q)\,\vartheta_3(x-y, q) = \vartheta_2(x, q)\,\vartheta_3(x, q)\,\vartheta_2(y, q)\,\vartheta_3(y, q) - \vartheta_1(x, q)\,\vartheta_4(x, q)\,\vartheta_1(y, q)\,\vartheta_4(y, q)$$

09.01.18.0037.01

$$\vartheta_2(0, q)\,\vartheta_4(0, q)\,\vartheta_2(x+y, q)\,\vartheta_4(x-y, q) = \vartheta_2(x, q)\,\vartheta_4(x, q)\,\vartheta_2(y, q)\,\vartheta_4(y, q) - \vartheta_1(x, q)\,\vartheta_3(x, q)\,\vartheta_1(y, q)\,\vartheta_3(y, q)$$

09.01.18.0038.01

$$\vartheta_3(0, q)\,\vartheta_4(0, q)\,\vartheta_3(x+y, q)\,\vartheta_4(x-y, q) = \vartheta_3(x, q)\,\vartheta_4(x, q)\,\vartheta_3(y, q)\,\vartheta_4(y, q) - \vartheta_1(x, q)\,\vartheta_2(x, q)\,\vartheta_1(y, q)\,\vartheta_2(y, q)$$

Relation between the four theta functions with zero argument

09.01.18.0039.01

$$\vartheta_1'(0, q) = \vartheta_2(0, q)\,\vartheta_3(0, q)\,\vartheta_4(0, q)$$

Double angle formulas

For $\vartheta_1(z, q)$

09.01.18.0040.01

$$\vartheta_2(0, q)\,\vartheta_3(0, q)\,\vartheta_4(0, q)\,\vartheta_1(2z, q) = 2\,\vartheta_1(z, q)\,\vartheta_2(z, q)\,\vartheta_3(z, q)\,\vartheta_4(z, q)$$

For $\vartheta_2(z, q)$

09.01.18.0041.01

$$\vartheta_2(0, q)^3\,\vartheta_2(2z, q) = \vartheta_2(z, q)^4 - \vartheta_1(z, q)^4$$

09.01.18.0042.01

$$\vartheta_2(0, q)^3\,\vartheta_2(2z, q) = \vartheta_3(z, q)^4 - \vartheta_4(z, q)^4$$

09.01.18.0043.01

$$\vartheta_3(0, q)^2\,\vartheta_2(0, q)\,\vartheta_2(2z, q) = \vartheta_2(z, q)^2\,\vartheta_3(z, q)^2 - \vartheta_1(z, q)^2\,\vartheta_4(z, q)^2$$

09.01.18.0044.01

$$\vartheta_4(0, q)^2\,\vartheta_2(0, q)\,\vartheta_2(2z, q) = \vartheta_2(z, q)^2\,\vartheta_4(z, q)^2 - \vartheta_1(z, q)^2\,\vartheta_3(z, q)^2$$

For $\vartheta_3(z, q)$

09.01.18.0045.01

$$\vartheta_3(0, q)^3\,\vartheta_3(2z, q) = \vartheta_1(z, q)^4 + \vartheta_3(z, q)^4$$

09.01.18.0046.01

$$\vartheta_3(0, q)^3\,\vartheta_3(2z, q) = \vartheta_2(z, q)^4 + \vartheta_4(z, q)^4$$

09.01.18.0047.01

$$\vartheta_2(0, q)^2 \vartheta_3(0, q) \vartheta_3(2z, q) = \vartheta_2(z, q)^2 \vartheta_3(z, q)^2 + \vartheta_1(z, q)^2 \vartheta_4(z, q)^2$$

09.01.18.0048.01

$$\vartheta_4(0, q)^2 \vartheta_3(0, q) \vartheta_3(2z, q) = \vartheta_3(z, q)^2 \vartheta_4(z, q)^2 - \vartheta_1(z, q)^2 \vartheta_2(z, q)^2$$

For $\vartheta_4(z, q)$

09.01.18.0049.01

$$\vartheta_4(0, q)^3 \vartheta_4(2z, q) = \vartheta_4(z, q)^4 - \vartheta_1(z, q)^4$$

09.01.18.0050.01

$$\vartheta_4(0, q)^3 \vartheta_4(2z, q) = \vartheta_3(z, q)^4 - \vartheta_2(z, q)^4$$

09.01.18.0051.01

$$\vartheta_2(0, q)^2 \vartheta_4(0, q) \vartheta_4(2z, q) = \vartheta_1(z, q)^2 \vartheta_3(z, q)^2 + \vartheta_2(z, q)^2 \vartheta_4(z, q)^2$$

09.01.18.0052.01

$$\vartheta_3(0, q)^2 \vartheta_4(0, q) \vartheta_4(2z, q) = \vartheta_1(z, q)^2 \vartheta_2(z, q)^2 + \vartheta_3(z, q)^2 \vartheta_4(z, q)^2$$

The 16 fundamental algebraic identities (from Enneper)

09.01.18.0053.01

$$\vartheta_2(a, q) \vartheta_2(b, q) \vartheta_2(c, q) \vartheta_2(d, q) + \vartheta_3(a, q) \vartheta_3(b, q) \vartheta_3(c, q) \vartheta_3(d, q) = \vartheta_2\left(\frac{1}{2}(a+b-c-d), q\right) \vartheta_2\left(\frac{1}{2}(a-b+c-d), q\right) \vartheta_2\left(\frac{1}{2}(a-b-c+d), q\right) \vartheta_2\left(\frac{1}{2}(a+b+c+d), q\right) + \vartheta_3\left(\frac{1}{2}(a+b-c-d), q\right) \vartheta_3\left(\frac{1}{2}(a-b+c-d), q\right) \vartheta_3\left(\frac{1}{2}(a-b-c+d), q\right) \vartheta_3\left(\frac{1}{2}(a+b+c+d), q\right)$$

09.01.18.0054.01

$$\vartheta_3(a, q) \vartheta_3(b, q) \vartheta_3(c, q) \vartheta_3(d, q) - \vartheta_2(a, q) \vartheta_2(b, q) \vartheta_2(c, q) \vartheta_2(d, q) = \vartheta_1\left(\frac{1}{2}(a+b-c-d), q\right) \vartheta_1\left(\frac{1}{2}(a-b+c-d), q\right) \vartheta_1\left(\frac{1}{2}(a-b-c+d), q\right) \vartheta_1\left(\frac{1}{2}(a+b+c+d), q\right) + \vartheta_4\left(\frac{1}{2}(a+b-c-d), q\right) \vartheta_4\left(\frac{1}{2}(a-b+c-d), q\right) \vartheta_4\left(\frac{1}{2}(a-b-c+d), q\right) \vartheta_4\left(\frac{1}{2}(a+b+c+d), q\right)$$

09.01.18.0055.01

$$\vartheta_1(a, q) \vartheta_1(b, q) \vartheta_1(c, q) \vartheta_1(d, q) + \vartheta_4(a, q) \vartheta_4(b, q) \vartheta_4(c, q) \vartheta_4(d, q) = \vartheta_3\left(\frac{1}{2}(a+b+c+d), q\right) \vartheta_3\left(\frac{1}{2}(a+b-c-d), q\right) \vartheta_3\left(\frac{1}{2}(a-b+c-d), q\right) \vartheta_3\left(\frac{1}{2}(a-b-c+d), q\right) - \vartheta_2\left(\frac{1}{2}(a+b+c+d), q\right) \vartheta_2\left(\frac{1}{2}(a+b-c-d), q\right) \vartheta_2\left(\frac{1}{2}(a-b+c-d), q\right) \vartheta_2\left(\frac{1}{2}(a-b-c+d), q\right)$$

09.01.18.0056.01

$$\vartheta_4(a, q) \vartheta_4(b, q) \vartheta_4(c, q) \vartheta_4(d, q) - \vartheta_1(a, q) \vartheta_1(b, q) \vartheta_1(c, q) \vartheta_1(d, q) = \vartheta_4\left(\frac{1}{2}(a+b+c+d), q\right) \vartheta_4\left(\frac{1}{2}(a+b-c-d), q\right) \vartheta_4\left(\frac{1}{2}(a-b+c-d), q\right) \vartheta_4\left(\frac{1}{2}(a-b-c+d), q\right) - \vartheta_1\left(\frac{1}{2}(a+b+c+d), q\right) \vartheta_1\left(\frac{1}{2}(a+b-c-d), q\right) \vartheta_1\left(\frac{1}{2}(a-b+c-d), q\right) \vartheta_1\left(\frac{1}{2}(a-b-c+d), q\right)$$

09.01.18.0057.01

$$\vartheta_1(a, q)\,\vartheta_1(b, q)\,\vartheta_2(c, q)\,\vartheta_2(d, q) + \vartheta_3(c, q)\,\vartheta_3(d, q)\,\vartheta_4(a, q)\,\vartheta_4(b, q) = \vartheta_1\left(\frac{1}{2}(a+b-c-d), q\right)\vartheta_1\left(\frac{1}{2}(a+b+c+d), q\right)\vartheta_2\left(\frac{1}{2}(a-b+c-d), q\right)\vartheta_2\left(\frac{1}{2}(a-b-c+d), q\right) + \vartheta_3\left(\frac{1}{2}(a-b+c-d), q\right)\vartheta_3\left(\frac{1}{2}(a-b-c+d), q\right)\vartheta_4\left(\frac{1}{2}(a+b-c-d), q\right)\vartheta_4\left(\frac{1}{2}(a+b+c+d), q\right)$$

09.01.18.0058.01

$$\vartheta_4(a, q)\,\vartheta_4(b, q)\,\vartheta_3(c, q)\,\vartheta_3(d, q) - \vartheta_1(a, q)\,\vartheta_1(b, q)\,\vartheta_2(c, q)\,\vartheta_2(d, q) = \vartheta_1\left(\frac{1}{2}(a-b+c-d), q\right)\vartheta_1\left(\frac{1}{2}(a-b-c+d), q\right)\vartheta_2\left(\frac{1}{2}(a+b-c-d), q\right)\vartheta_2\left(\frac{1}{2}(a+b+c+d), q\right) + \vartheta_3\left(\frac{1}{2}(a+b-c-d), q\right)\vartheta_3\left(\frac{1}{2}(a+b+c+d), q\right)\vartheta_4\left(\frac{1}{2}(a-b+c-d), q\right)\vartheta_4\left(\frac{1}{2}(a-b-c+d), q\right)$$

09.01.18.0059.01

$$\vartheta_1(a, q)\,\vartheta_1(b, q)\,\vartheta_3(c, q)\,\vartheta_3(d, q) + \vartheta_2(c, q)\,\vartheta_2(d, q)\,\vartheta_4(a, q)\,\vartheta_4(b, q) = \vartheta_1\left(\frac{1}{2}(a+b-c-d), q\right)\vartheta_1\left(\frac{1}{2}(a+b+c+d), q\right)\vartheta_3\left(\frac{1}{2}(a-b+c-d), q\right)\vartheta_3\left(\frac{1}{2}(a-b-c+d), q\right) + \vartheta_2\left(\frac{1}{2}(a-b+c-d), q\right)\vartheta_2\left(\frac{1}{2}(a-b-c+d), q\right)\vartheta_4\left(\frac{1}{2}(a+b-c-d), q\right)\vartheta_4\left(\frac{1}{2}(a+b+c+d), q\right)$$

09.01.18.0060.01

$$\vartheta_4(a, q)\,\vartheta_4(b, q)\,\vartheta_2(c, q)\,\vartheta_2(d, q) - \vartheta_1(a, q)\,\vartheta_1(b, q)\,\vartheta_3(c, q)\,\vartheta_3(d, q) = \vartheta_1\left(\frac{1}{2}(a-b+c-d), q\right)\vartheta_1\left(\frac{1}{2}(a-b-c+d), q\right)\vartheta_3\left(\frac{1}{2}(a+b-c-d), q\right)\vartheta_3\left(\frac{1}{2}(a+b+c+d), q\right) + \vartheta_2\left(\frac{1}{2}(a+b-c-d), q\right)\vartheta_2\left(\frac{1}{2}(a+b+c+d), q\right)\vartheta_4\left(\frac{1}{2}(a-b+c-d), q\right)\vartheta_4\left(\frac{1}{2}(a-b-c+d), q\right)$$

09.01.18.0061.01

$$\vartheta_2(c, q)\,\vartheta_2(d, q)\,\vartheta_3(a, q)\,\vartheta_3(b, q) + \vartheta_2(a, q)\,\vartheta_2(b, q)\,\vartheta_3(c, q)\,\vartheta_3(d, q) = \vartheta_2\left(\frac{1}{2}(a+b-c-d), q\right)\vartheta_2\left(\frac{1}{2}(a+b+c+d), q\right)\vartheta_3\left(\frac{1}{2}(a-b+c-d), q\right)\vartheta_3\left(\frac{1}{2}(a-b-c+d), q\right) + \vartheta_2\left(\frac{1}{2}(a-b+c-d), q\right)\vartheta_2\left(\frac{1}{2}(a-b-c+d), q\right)\vartheta_3\left(\frac{1}{2}(a+b-c-d), q\right)\vartheta_3\left(\frac{1}{2}(a+b+c+d), q\right)$$

09.01.18.0062.01

$$\vartheta_3(a, q)\,\vartheta_3(b, q)\,\vartheta_2(c, q)\,\vartheta_2(d, q) - \vartheta_2(a, q)\,\vartheta_2(b, q)\,\vartheta_3(c, q)\,\vartheta_3(d, q) = \vartheta_1\left(\frac{1}{2}(a+b-c-d), q\right)\vartheta_1\left(\frac{1}{2}(a+b+c+d), q\right)\vartheta_4\left(\frac{1}{2}(a-b+c-d), q\right)\vartheta_4\left(\frac{1}{2}(a-b-c+d), q\right) + \vartheta_1\left(\frac{1}{2}(a-b+c-d), q\right)\vartheta_1\left(\frac{1}{2}(a-b-c+d), q\right)\vartheta_4\left(\frac{1}{2}(a+b-c-d), q\right)\vartheta_4\left(\frac{1}{2}(a+b+c+d), q\right)$$

09.01.18.0063.01

$$\vartheta_1(c, q)\,\vartheta_1(d, q)\,\vartheta_4(a, q)\,\vartheta_4(b, q) + \vartheta_1(a, q)\,\vartheta_1(b, q)\,\vartheta_4(c, q)\,\vartheta_4(d, q) = \vartheta_3\left(\frac{1}{2}(a+b+c+d), q\right)\vartheta_3\left(\frac{1}{2}(a+b-c-d), q\right)\vartheta_2\left(\frac{1}{2}(a-b+c-d), q\right)\vartheta_2\left(\frac{1}{2}(a-b-c+d), q\right) - \vartheta_2\left(\frac{1}{2}(a+b+c+d), q\right)\vartheta_2\left(\frac{1}{2}(a+b-c-d), q\right)\vartheta_3\left(\frac{1}{2}(a-b+c-d), q\right)\vartheta_3\left(\frac{1}{2}(a-b-c+d), q\right)$$

09.01.18.0064.01

$$\vartheta_4(a,q)\,\vartheta_4(b,q)\,\vartheta_1(c,q)\,\vartheta_1(d,q)-\vartheta_1(a,q)\,\vartheta_1(b,q)\,\vartheta_4(c,q)\,\vartheta_4(d,q)=\vartheta_4\!\left(\frac{1}{2}(a+b+c+d),q\right)\vartheta_4\!\left(\frac{1}{2}(a+b-c-d),q\right)\vartheta_1\!\left(\frac{1}{2}(a-b+c-d),q\right)\vartheta_1\!\left(\frac{1}{2}(a-b-c+d),q\right)-\vartheta_1\!\left(\frac{1}{2}(a+b+c+d),q\right)\vartheta_1\!\left(\frac{1}{2}(a+b-c-d),q\right)\vartheta_4\!\left(\frac{1}{2}(a-b+c-d),q\right)\vartheta_4\!\left(\frac{1}{2}(a-b-c+d),q\right)$$

09.01.18.0065.01

$$\vartheta_2(c,q)\,\vartheta_2(d,q)\,\vartheta_3(a,q)\,\vartheta_3(b,q)+\vartheta_1(c,q)\,\vartheta_1(d,q)\,\vartheta_4(a,q)\,\vartheta_4(b,q)=\vartheta_2\!\left(\frac{1}{2}(a-b+c-d),q\right)\vartheta_2\!\left(\frac{1}{2}(a-b-c+d),q\right)\vartheta_3\!\left(\frac{1}{2}(a+b-c-d),q\right)\vartheta_3\!\left(\frac{1}{2}(a+b+c+d),q\right)+\vartheta_1\!\left(\frac{1}{2}(a-b+c-d),q\right)\vartheta_1\!\left(\frac{1}{2}(a-b-c+d),q\right)\vartheta_4\!\left(\frac{1}{2}(a+b-c-d),q\right)\vartheta_4\!\left(\frac{1}{2}(a+b+c+d),q\right)$$

09.01.18.0066.01

$$\vartheta_3(a,q)\,\vartheta_3(b,q)\,\vartheta_2(c,q)\,\vartheta_2(d,q)-\vartheta_4(a,q)\,\vartheta_4(b,q)\,\vartheta_1(c,q)\,\vartheta_1(d,q)=\vartheta_2\!\left(\frac{1}{2}(a+b-c-d),q\right)\vartheta_2\!\left(\frac{1}{2}(a+b+c+d),q\right)\vartheta_3\!\left(\frac{1}{2}(a-b+c-d),q\right)\vartheta_3\!\left(\frac{1}{2}(a-b-c+d),q\right)+\vartheta_1\!\left(\frac{1}{2}(a+b-c-d),q\right)\vartheta_1\!\left(\frac{1}{2}(a+b+c+d),q\right)\vartheta_4\!\left(\frac{1}{2}(a-b+c-d),q\right)\vartheta_4\!\left(\frac{1}{2}(a-b-c+d),q\right)$$

09.01.18.0067.01

$$\vartheta_1(d,q)\,\vartheta_2(b,q)\,\vartheta_3(a,q)\,\vartheta_4(c,q)+\vartheta_1(c,q)\,\vartheta_2(a,q)\,\vartheta_3(b,q)\,\vartheta_4(d,q)=\vartheta_1\!\left(\frac{1}{2}(a+b+c+d),q\right)\vartheta_4\!\left(\frac{1}{2}(a+b-c-d),q\right)\vartheta_2\!\left(\frac{1}{2}(a-b+c-d),q\right)\vartheta_3\!\left(\frac{1}{2}(a-b-c+d),q\right)-\vartheta_4\!\left(\frac{1}{2}(a+b+c+d),q\right)\vartheta_1\!\left(\frac{1}{2}(a+b-c-d),q\right)\vartheta_3\!\left(\frac{1}{2}(a-b+c-d),q\right)\vartheta_2\!\left(\frac{1}{2}(a-b-c+d),q\right)$$

09.01.18.0068.01

$$\vartheta_3(a,q)\,\vartheta_2(b,q)\,\vartheta_4(c,q)\,\vartheta_1(d,q)-\vartheta_2(a,q)\,\vartheta_3(b,q)\,\vartheta_1(c,q)\,\vartheta_4(d,q)=\vartheta_3\!\left(\frac{1}{2}(a+b+c+d),q\right)\vartheta_2\!\left(\frac{1}{2}(a+b-c-d),q\right)\vartheta_4\!\left(\frac{1}{2}(a-b+c-d),q\right)\vartheta_1\!\left(\frac{1}{2}(a-b-c+d),q\right)-\vartheta_2\!\left(\frac{1}{2}(a+b+c+d),q\right)\vartheta_3\!\left(\frac{1}{2}(a+b-c-d),q\right)\vartheta_1\!\left(\frac{1}{2}(a-b+c-d),q\right)\vartheta_4\!\left(\frac{1}{2}(a-b-c+d),q\right)$$

Four linear combinations of the fundamental identities

09.01.18.0069.01

$$\vartheta_1\!\left(\frac{1}{2}(a+b+c+d),q\right)\vartheta_1\!\left(\frac{1}{2}(a+b-c-d),q\right)\vartheta_1\!\left(\frac{1}{2}(a-b+c-d),q\right)\vartheta_1\!\left(\frac{1}{2}(a-b-c+d),q\right)=\frac{1}{2}\left(\vartheta_1(a,q)\,\vartheta_1(b,q)\,\vartheta_1(c,q)\,\vartheta_1(d,q)-\vartheta_2(a,q)\,\vartheta_2(b,q)\,\vartheta_2(c,q)\,\vartheta_2(d,q)+\vartheta_3(a,q)\,\vartheta_3(b,q)\,\vartheta_3(c,q)\,\vartheta_3(d,q)-\vartheta_4(a,q)\,\vartheta_4(b,q)\,\vartheta_4(c,q)\,\vartheta_4(d,q)\right)$$

09.01.18.0070.01

$$\vartheta_2\!\left(\frac{1}{2}(a+b+c+d),q\right)\vartheta_2\!\left(\frac{1}{2}(a+b-c-d),q\right)\vartheta_2\!\left(\frac{1}{2}(a-b+c-d),q\right)\vartheta_2\!\left(\frac{1}{2}(a-b-c+d),q\right)=\frac{1}{2}\left(-\vartheta_1(a,q)\,\vartheta_1(b,q)\,\vartheta_1(c,q)\,\vartheta_1(d,q)+\vartheta_2(a,q)\,\vartheta_2(b,q)\,\vartheta_2(c,q)\,\vartheta_2(d,q)+\vartheta_3(a,q)\,\vartheta_3(b,q)\,\vartheta_3(c,q)\,\vartheta_3(d,q)-\vartheta_4(a,q)\,\vartheta_4(b,q)\,\vartheta_4(c,q)\,\vartheta_4(d,q)\right)$$

09.01.18.0071.01

$$\vartheta_3\left(\frac{1}{2}(a+b+c+d), q\right)\vartheta_3\left(\frac{1}{2}(a+b-c-d), q\right)\vartheta_3\left(\frac{1}{2}(a-b+c-d), q\right)\vartheta_3\left(\frac{1}{2}(a-b-c+d), q\right) = \frac{1}{2}(\vartheta_1(a, q)\,\vartheta_1(b, q)\,\vartheta_1(c, q)\,\vartheta_1(d, q) + \vartheta_2(a, q)\,\vartheta_2(b, q)\,\vartheta_2(c, q)\,\vartheta_2(d, q) + \vartheta_3(a, q)\,\vartheta_3(b, q)\,\vartheta_3(c, q)\,\vartheta_3(d, q) + \vartheta_4(a, q)\,\vartheta_4(b, q)\,\vartheta_4(c, q)\,\vartheta_4(d, q))$$

09.01.18.0072.01

$$\vartheta_4\left(\frac{1}{2}(a+b+c+d), q\right)\vartheta_4\left(\frac{1}{2}(a+b-c-d), q\right)\vartheta_4\left(\frac{1}{2}(a-b+c-d), q\right)\vartheta_4\left(\frac{1}{2}(a-b-c+d), q\right) = \frac{1}{2}(-\vartheta_1(a, q)\,\vartheta_1(b, q)\,\vartheta_1(c, q)\,\vartheta_1(d, q) - \vartheta_2(a, q)\,\vartheta_2(b, q)\,\vartheta_2(c, q)\,\vartheta_2(d, q) + \vartheta_3(a, q)\,\vartheta_3(b, q)\,\vartheta_3(c, q)\,\vartheta_3(d, q) + \vartheta_4(a, q)\,\vartheta_4(b, q)\,\vartheta_4(c, q)\,\vartheta_4(d, q))$$

Alternative version of fundamental identities (from Tannery and Molk)

09.01.18.0073.01

$$\vartheta_1(d-b, q)\,\vartheta_1(b+d, q)\,\vartheta_1(a-c, q)\,\vartheta_1(a+c, q) + \vartheta_1(b-c, q)\,\vartheta_1(b+c, q)\,\vartheta_1(a-d, q)\,\vartheta_1(a+d, q) + \vartheta_1(a-b, q)\,\vartheta_1(a+b, q)\,\vartheta_1(c-d, q)\,\vartheta_1(c+d, q) = 0$$

09.01.18.0074.01

$$-\vartheta_1(d-b, q)\,\vartheta_1(b+d, q)\,\vartheta_1(a-c, q)\,\vartheta_1(a+c, q) - \vartheta_2(b-c, q)\,\vartheta_2(b+c, q)\,\vartheta_2(a-d, q)\,\vartheta_2(a+d, q) + \vartheta_2(a-b, q)\,\vartheta_2(a+b, q)\,\vartheta_2(c-d, q)\,\vartheta_2(c+d, q) = 0$$

09.01.18.0075.01

$$\vartheta_1(d-b, q)\,\vartheta_1(b+d, q)\,\vartheta_1(a-c, q)\,\vartheta_1(a+c, q) - \vartheta_3(b-c, q)\,\vartheta_3(b+c, q)\,\vartheta_3(a-d, q)\,\vartheta_3(a+d, q) + \vartheta_3(a-b, q)\,\vartheta_3(a+b, q)\,\vartheta_3(c-d, q)\,\vartheta_3(c+d, q) = 0$$

09.01.18.0076.01

$$\vartheta_4(a-b, q)\,\vartheta_4(a+b, q)\,\vartheta_4(c-d, q)\,\vartheta_4(c+d, q) - \vartheta_1(d-b, q)\,\vartheta_1(b+d, q)\,\vartheta_1(a-c, q)\,\vartheta_1(a+c, q) - \vartheta_4(b-c, q)\,\vartheta_4(b+c, q)\,\vartheta_4(a-d, q)\,\vartheta_4(a+d, q) = 0$$

09.01.18.0077.01

$$\vartheta_2(a-b, q)\,\vartheta_2(a+b, q)\,\vartheta_2(c-d, q)\,\vartheta_2(c+d, q) + \vartheta_3(a-b, q)\,\vartheta_3(a+b, q)\,\vartheta_3(c-d, q)\,\vartheta_3(c+d, q) = \vartheta_2(d-b, q)\,\vartheta_2(b+d, q)\,\vartheta_2(a-c, q)\,\vartheta_2(a+c, q) + \vartheta_3(d-b, q)\,\vartheta_3(b+d, q)\,\vartheta_3(a-c, q)\,\vartheta_3(a+c, q)$$

09.01.18.0078.01

$$\vartheta_2(a-b, q)\,\vartheta_2(a+b, q)\,\vartheta_2(c-d, q)\,\vartheta_2(c+d, q) + \vartheta_3(a-b, q)\,\vartheta_3(a+b, q)\,\vartheta_3(c-d, q)\,\vartheta_3(c+d, q) = \vartheta_2(b-c, q)\,\vartheta_2(b+c, q)\,\vartheta_2(a-d, q)\,\vartheta_2(a+d, q) + \vartheta_3(b-c, q)\,\vartheta_3(b+c, q)\,\vartheta_3(a-d, q)\,\vartheta_3(a+d, q)$$

09.01.18.0079.01

$$\vartheta_3(a-b, q)\,\vartheta_3(a+b, q)\,\vartheta_3(c-d, q)\,\vartheta_3(c+d, q) + \vartheta_4(a-b, q)\,\vartheta_4(a+b, q)\,\vartheta_4(c-d, q)\,\vartheta_4(c+d, q) = \vartheta_3(d-b, q)\,\vartheta_3(b+d, q)\,\vartheta_3(a-c, q)\,\vartheta_3(a+c, q) + \vartheta_4(d-b, q)\,\vartheta_4(b+d, q)\,\vartheta_4(a-c, q)\,\vartheta_4(a+c, q)$$

09.01.18.0080.01

$$\vartheta_3(a-b, q)\,\vartheta_3(a+b, q)\,\vartheta_3(c-d, q)\,\vartheta_3(c+d, q) + \vartheta_4(a-b, q)\,\vartheta_4(a+b, q)\,\vartheta_4(c-d, q)\,\vartheta_4(c+d, q) = \vartheta_3(b-c, q)\,\vartheta_3(b+c, q)\,\vartheta_3(a-d, q)\,\vartheta_3(a+d, q) + \vartheta_4(b-c, q)\,\vartheta_4(b+c, q)\,\vartheta_4(a-d, q)\,\vartheta_4(a+d, q)$$

Automatically generated triple addition formulas (using 16 fundamental relations)

09.01.18.0081.01

$$-\vartheta_2(0, q)\,\vartheta_2(x+y, q)\,\vartheta_2(x+z, q)\,\vartheta_2(y+z, q) + \vartheta_2(x, q)\,\vartheta_2(y, q)\,\vartheta_2(z, q)\,\vartheta_2(x+y+z, q) - \vartheta_3(0, q)\,\vartheta_3(x+y, q)\,\vartheta_3(x+z, q)\,\vartheta_3(y+z, q) + \vartheta_3(x, q)\,\vartheta_3(y, q)\,\vartheta_3(z, q)\,\vartheta_3(x+y+z, q) = 0$$

09.01.18.0082.01

$$-\vartheta_2(x, q)\,\vartheta_2(y, q)\,\vartheta_2(z, q)\,\vartheta_2(x+y+z, q) + \vartheta_3(x, q)\,\vartheta_3(y, q)\,\vartheta_3(z, q)\,\vartheta_3(x+y+z, q) - \vartheta_4(0, q)\,\vartheta_4(x+y, q)\,\vartheta_4(x+z, q)\,\vartheta_4(y+z, q) = 0$$

09.01.18.0083.01

$$-\vartheta_1(x,q)\,\vartheta_1(y,q)\,\vartheta_1(z,q)\,\vartheta_1(x+y+z,q)+\vartheta_2(0,q)\,\vartheta_2(x+y,q)\,\vartheta_2(x+z,q)\,\vartheta_2(y+z,q)-\vartheta_3(0,q)\,\vartheta_3(x+y,q)\,\vartheta_3(x+z,q)\,\vartheta_3(y+z,q)+\vartheta_4(x,q)\,\vartheta_4(y,q)\,\vartheta_4(z,q)\,\vartheta_4(x+y+z,q)=0$$

09.01.18.0084.01

$$\vartheta_1(x,q)\,\vartheta_1(y,q)\,\vartheta_1(z,q)\,\vartheta_1(x+y+z,q)-\vartheta_4(0,q)\,\vartheta_4(x+y,q)\,\vartheta_4(x+z,q)\,\vartheta_4(y+z,q)+\vartheta_4(x,q)\,\vartheta_4(y,q)\,\vartheta_4(z,q)\,\vartheta_4(x+y+z,q)=0$$

09.01.18.0085.01

$$\vartheta_1(x,q)\,\vartheta_1(y,q)\,\vartheta_2(z,q)\,\vartheta_2(x+y+z,q)+\vartheta_3(z,q)\,\vartheta_3(x+y+z,q)\,\vartheta_4(x,q)\,\vartheta_4(y,q)-\vartheta_3(x+z,q)\,\vartheta_3(y+z,q)\,\vartheta_4(0,q)\,\vartheta_4(x+y,q)=0$$

09.01.18.0086.01

$$\vartheta_1(x+z,q)\,\vartheta_1(y+z,q)\,\vartheta_2(0,q)\,\vartheta_2(x+y,q)-\vartheta_1(x,q)\,\vartheta_1(y,q)\,\vartheta_2(z,q)\,\vartheta_2(x+y+z,q)+\vartheta_3(z,q)\,\vartheta_3(x+y+z,q)\,\vartheta_4(x,q)\,\vartheta_4(y,q)-\vartheta_3(0,q)\,\vartheta_3(x+y,q)\,\vartheta_4(x+z,q)\,\vartheta_4(y+z,q)=0$$

09.01.18.0087.01

$$\vartheta_1(x,q)\,\vartheta_1(y,q)\,\vartheta_3(z,q)\,\vartheta_3(x+y+z,q)+\vartheta_2(z,q)\,\vartheta_2(x+y+z,q)\,\vartheta_4(x,q)\,\vartheta_4(y,q)-\vartheta_2(x+z,q)\,\vartheta_2(y+z,q)\,\vartheta_4(0,q)\,\vartheta_4(x+y,q)=0$$

09.01.18.0088.01

$$\vartheta_1(x+z,q)\,\vartheta_1(y+z,q)\,\vartheta_3(0,q)\,\vartheta_3(x+y,q)-\vartheta_1(x,q)\,\vartheta_1(y,q)\,\vartheta_3(z,q)\,\vartheta_3(x+y+z,q)+\vartheta_2(z,q)\,\vartheta_2(x+y+z,q)\,\vartheta_4(x,q)\,\vartheta_4(y,q)-\vartheta_2(0,q)\,\vartheta_2(x+y,q)\,\vartheta_4(x+z,q)\,\vartheta_4(y+z,q)=0$$

09.01.18.0089.01

$$\vartheta_2(z,q)\,\vartheta_2(x+y+z,q)\,\vartheta_3(x,q)\,\vartheta_3(y,q)-\vartheta_2(x+z,q)\,\vartheta_2(y+z,q)\,\vartheta_3(0,q)\,\vartheta_3(x+y,q)-\vartheta_2(0,q)\,\vartheta_2(x+y,q)\,\vartheta_3(x+z,q)\,\vartheta_3(y+z,q)+\vartheta_2(x,q)\,\vartheta_2(y,q)\,\vartheta_3(z,q)\,\vartheta_3(x+y+z,q)=0$$

09.01.18.0090.01

$$\vartheta_2(z,q)\,\vartheta_2(x+y+z,q)\,\vartheta_3(x,q)\,\vartheta_3(y,q)-\vartheta_2(x,q)\,\vartheta_2(y,q)\,\vartheta_3(z,q)\,\vartheta_3(x+y+z,q)+\vartheta_1(x+z,q)\,\vartheta_1(y+z,q)\,\vartheta_4(0,q)\,\vartheta_4(x+y,q)=0$$

09.01.18.0091.01

$$-\vartheta_2(x+z,q)\,\vartheta_2(y+z,q)\,\vartheta_3(0,q)\,\vartheta_3(x+y,q)+\vartheta_2(0,q)\,\vartheta_2(x+y,q)\,\vartheta_3(x+z,q)\,\vartheta_3(y+z,q)-\vartheta_1(z,q)\,\vartheta_1(x+y+z,q)\,\vartheta_4(x,q)\,\vartheta_4(y,q)+\vartheta_1(x,q)\,\vartheta_1(y,q)\,\vartheta_4(z,q)\,\vartheta_4(x+y+z,q)=0$$

09.01.18.0092.01

$$-\vartheta_1(z,q)\,\vartheta_1(x+y+z,q)\,\vartheta_4(x,q)\,\vartheta_4(y,q)+\vartheta_1(x+z,q)\,\vartheta_1(y+z,q)\,\vartheta_4(0,q)\,\vartheta_4(x+y,q)-\vartheta_1(x,q)\,\vartheta_1(y,q)\,\vartheta_4(z,q)\,\vartheta_4(x+y+z,q)=0$$

09.01.18.0093.01

$$\vartheta_2(z,q)\,\vartheta_2(x+y+z,q)\,\vartheta_3(x,q)\,\vartheta_3(y,q)-\vartheta_2(x+z,q)\,\vartheta_2(y+z,q)\,\vartheta_3(0,q)\,\vartheta_3(x+y,q)-\vartheta_1(z,q)\,\vartheta_1(x+y+z,q)\,\vartheta_4(x,q)\,\vartheta_4(y,q)+\vartheta_1(x+z,q)\,\vartheta_1(y+z,q)\,\vartheta_4(0,q)\,\vartheta_4(x+y,q)=0$$

09.01.18.0094.01

$$\vartheta_2(z,q)\,\vartheta_2(x+y+z,q)\,\vartheta_3(x,q)\,\vartheta_3(y,q)-\vartheta_2(0,q)\,\vartheta_2(x+y,q)\,\vartheta_3(x+z,q)\,\vartheta_3(y+z,q)+\vartheta_1(z,q)\,\vartheta_1(x+y+z,q)\,\vartheta_4(x,q)\,\vartheta_4(y,q)=0$$

09.01.18.0095.01

$$\vartheta_1(x+y,q)\,\vartheta_2(y+z,q)\,\vartheta_3(x+z,q)\,\vartheta_4(0,q)-\vartheta_1(x+y+z,q)\,\vartheta_2(y,q)\,\vartheta_3(x,q)\,\vartheta_4(z,q)+\vartheta_1(z,q)\,\vartheta_2(x,q)\,\vartheta_3(y,q)\,\vartheta_4(x+y+z,q)=0$$

09.01.18.0096.01

$$-\vartheta_1(x+y+z,q)\,\vartheta_2(y,q)\,\vartheta_3(x,q)\,\vartheta_4(z,q)+\vartheta_1(y+z,q)\,\vartheta_2(x+y,q)\,\vartheta_3(0,q)\,\vartheta_4(x+z,q)+\vartheta_1(x+z,q)\,\vartheta_2(0,q)\,\vartheta_3(x+y,q)\,\vartheta_4(y+z,q)-\vartheta_1(z,q)\,\vartheta_2(x,q)\,\vartheta_3(y,q)\,\vartheta_4(x+y+z,q)=0$$

Triple addition formulas (from Enneper)

09.01.18.0097.01

$$\vartheta_3(x+y+z,q)\,\vartheta_3(x,q)\,\vartheta_3(y,q)\,\vartheta_3(z,q)-\vartheta_2(x+y+z,q)\,\vartheta_2(x,q)\,\vartheta_2(y,q)\,\vartheta_2(z,q)=\vartheta_1(x,q)\,\vartheta_1(y,q)\,\vartheta_1(z,q)\,\vartheta_1(x+y+z,q)+\vartheta_4(x,q)\,\vartheta_4(y,q)\,\vartheta_4(z,q)\,\vartheta_4(x+y+z,q)$$

09.01.18.0098.01

$$\vartheta_3(x+y+z,q)\,\vartheta_3(x,q)\,\vartheta_3(y,q)\,\vartheta_3(z,q)-\vartheta_2(x+y+z,q)\,\vartheta_2(x,q)\,\vartheta_2(y,q)\,\vartheta_2(z,q)=\vartheta_4(0,q)\,\vartheta_4(x+y,q)\,\vartheta_4(x+z,q)\,\vartheta_4(y+z,q)$$

09.01.18.0099.01

$$\vartheta_4(x+y+z,q)\,\vartheta_4(x,q)\,\vartheta_3(y,q)\,\vartheta_3(z,q)-\vartheta_1(x+y+z,q)\,\vartheta_1(x,q)\,\vartheta_2(y,q)\,\vartheta_2(z,q)=\vartheta_1(y,q)\,\vartheta_1(z,q)\,\vartheta_2(x,q)\,\vartheta_2(x+y+z,q)+\vartheta_3(x,q)\,\vartheta_3(x+y+z,q)\,\vartheta_4(y,q)\,\vartheta_4(z,q)$$

09.01.18.0100.01

$$\vartheta_4(x+y+z,q)\,\vartheta_4(x,q)\,\vartheta_3(y,q)\,\vartheta_3(z,q)-\vartheta_1(x+y+z,q)\,\vartheta_1(x,q)\,\vartheta_2(y,q)\,\vartheta_2(z,q)=\vartheta_4(0,q)\,\vartheta_3(x+y,q)\,\vartheta_3(x+z,q)\,\vartheta_4(y+z,q)$$

09.01.18.0101.01

$$\vartheta_4(x+y+z,q)\,\vartheta_4(x,q)\,\vartheta_2(y,q)\,\vartheta_2(z,q)-\vartheta_1(x+y+z,q)\,\vartheta_1(x,q)\,\vartheta_3(y,q)\,\vartheta_3(z,q)=\vartheta_1(y,q)\,\vartheta_1(z,q)\,\vartheta_3(x,q)\,\vartheta_3(x+y+z,q)+\vartheta_2(x,q)\,\vartheta_2(x+y+z,q)\,\vartheta_4(y,q)\,\vartheta_4(z,q)$$

09.01.18.0102.01

$$\vartheta_4(x+y+z,q)\,\vartheta_4(x,q)\,\vartheta_2(y,q)\,\vartheta_2(z,q)-\vartheta_1(x+y+z,q)\,\vartheta_1(x,q)\,\vartheta_3(y,q)\,\vartheta_3(z,q)=\vartheta_4(0,q)\,\vartheta_2(x+y,q)\,\vartheta_2(x+z,q)\,\vartheta_4(y+z,q)$$

09.01.18.0103.01

$$\vartheta_3(x+y+z,q)\,\vartheta_3(x,q)\,\vartheta_2(y,q)\,\vartheta_2(z,q)-\vartheta_2(x+y+z,q)\,\vartheta_2(x,q)\,\vartheta_3(y,q)\,\vartheta_3(z,q)=\vartheta_1(x,q)\,\vartheta_1(x+y+z,q)\,\vartheta_4(y,q)\,\vartheta_4(z,q)+\vartheta_1(y,q)\,\vartheta_1(z,q)\,\vartheta_4(x,q)\,\vartheta_4(x+y+z,q)$$

09.01.18.0104.01

$$\vartheta_3(x+y+z,q)\,\vartheta_3(x,q)\,\vartheta_2(y,q)\,\vartheta_2(z,q)-\vartheta_2(x+y+z,q)\,\vartheta_2(x,q)\,\vartheta_3(y,q)\,\vartheta_3(z,q)=\vartheta_4(0,q)\,\vartheta_1(x+y,q)\,\vartheta_1(x+z,q)\,\vartheta_4(y+z,q)$$

09.01.18.0105.01

$$\vartheta_1(z,q)\,\vartheta_2(x,q)\,\vartheta_3(x+y+z,q)\,\vartheta_4(y,q)+\vartheta_1(y,q)\,\vartheta_2(x+y+z,q)\,\vartheta_3(x,q)\,\vartheta_4(z,q)=\vartheta_1(x+y+z,q)\,\vartheta_4(x,q)\,\vartheta_2(y,q)\,\vartheta_3(z,q)-\vartheta_4(x+y+z,q)\,\vartheta_1(x,q)\,\vartheta_3(y,q)\,\vartheta_2(z,q)$$

09.01.18.0106.01

$$\vartheta_1(z,q)\,\vartheta_2(x,q)\,\vartheta_3(x+y+z,q)\,\vartheta_4(y,q)+\vartheta_1(y,q)\,\vartheta_2(x+y+z,q)\,\vartheta_3(x,q)\,\vartheta_4(z,q)=\vartheta_4(0,q)\,\vartheta_2(x+y,q)\,\vartheta_3(x+z,q)\,\vartheta_1(y+z,q)$$

Automatically generated addition formulas with two variables

09.01.18.0107.01

$$-\vartheta_2(y-x,q)\,\vartheta_2(x+y,q)\,\vartheta_2(0,q)^2+\vartheta_2(x,q)^2\,\vartheta_2(y,q)^2+\vartheta_3(x,q)^2\,\vartheta_3(y,q)^2-\vartheta_3(0,q)^2\,\vartheta_3(y-x,q)\,\vartheta_3(x+y,q)=0$$

09.01.18.0108.01

$$-\vartheta_2(x,q)^2\,\vartheta_2(y,q)^2+\vartheta_3(x,q)^2\,\vartheta_3(y,q)^2-\vartheta_4(0,q)^2\,\vartheta_4(y-x,q)\,\vartheta_4(x+y,q)=0$$

09.01.18.0109.01

$$\vartheta_1(x,q)^2\,\vartheta_1(y,q)^2+\vartheta_4(x,q)^2\,\vartheta_4(y,q)^2+\vartheta_2(0,q)^2\,\vartheta_2(y-x,q)\,\vartheta_2(x+y,q)-\vartheta_3(0,q)^2\,\vartheta_3(y-x,q)\,\vartheta_3(x+y,q)=0$$

09.01.18.0110.01

$$-\vartheta_1(x,q)^2\,\vartheta_1(y,q)^2+\vartheta_4(x,q)^2\,\vartheta_4(y,q)^2-\vartheta_4(0,q)^2\,\vartheta_4(y-x,q)\,\vartheta_4(x+y,q)=0$$

09.01.18.0111.01

$$\vartheta_1(x,q)\,\vartheta_1(y,q)\,\vartheta_2(x,q)\,\vartheta_2(y,q)+\vartheta_3(x,q)\,\vartheta_3(y,q)\,\vartheta_4(x,q)\,\vartheta_4(y,q)-\vartheta_3(0,q)\,\vartheta_3(y-x,q)\,\vartheta_4(0,q)\,\vartheta_4(x+y,q)=0$$

09.01.18.0112.01

$$-\vartheta_1(x,q)\,\vartheta_1(y,q)\,\vartheta_2(x,q)\,\vartheta_2(y,q)+\vartheta_3(x,q)\,\vartheta_3(y,q)\,\vartheta_4(x,q)\,\vartheta_4(y,q)-\vartheta_3(0,q)\,\vartheta_3(x+y,q)\,\vartheta_4(0,q)\,\vartheta_4(y-x,q)=0$$

09.01.18.0113.01

$$\vartheta_1(x,q)\,\vartheta_1(y,q)\,\vartheta_3(x,q)\,\vartheta_3(y,q)+\vartheta_2(x,q)\,\vartheta_2(y,q)\,\vartheta_4(x,q)\,\vartheta_4(y,q)-\vartheta_2(0,q)\,\vartheta_2(y-x,q)\,\vartheta_4(0,q)\,\vartheta_4(x+y,q)=0$$

09.01.18.0114.01

$$-\vartheta_1(x, q)\,\vartheta_1(y, q)\,\vartheta_3(x, q)\,\vartheta_3(y, q) + \vartheta_2(x, q)\,\vartheta_2(y, q)\,\vartheta_4(x, q)\,\vartheta_4(y, q) - \vartheta_2(0, q)\,\vartheta_2(x + y, q)\,\vartheta_4(0, q)\,\vartheta_4(y - x, q) == 0$$

09.01.18.0115.01

$$2\,\vartheta_2(x, q)\,\vartheta_2(y, q)\,\vartheta_3(x, q)\,\vartheta_3(y, q) - \vartheta_2(0, q)\,\vartheta_3(0, q)\,(\vartheta_2(x + y, q)\,\vartheta_3(y - x, q) + \vartheta_2(y - x, q)\,\vartheta_3(x + y, q)) == 0$$

09.01.18.0116.01

$$\vartheta_2(0, q)\,\vartheta_3(0, q)\,(\vartheta_2(x + y, q)\,\vartheta_3(y - x, q) - \vartheta_2(y - x, q)\,\vartheta_3(x + y, q)) + 2\,\vartheta_1(x, q)\,\vartheta_1(y, q)\,\vartheta_4(x, q)\,\vartheta_4(y, q) == 0$$

09.01.18.0117.01

$$\vartheta_2(x, q)\,\vartheta_2(y, q)\,\vartheta_3(x, q)\,\vartheta_3(y, q) - \vartheta_2(0, q)\,\vartheta_2(y - x, q)\,\vartheta_3(0, q)\,\vartheta_3(x + y, q) + \vartheta_1(x, q)\,\vartheta_1(y, q)\,\vartheta_4(x, q)\,\vartheta_4(y, q) == 0$$

09.01.18.0118.01

$$\vartheta_2(x, q)\,\vartheta_2(y, q)\,\vartheta_3(x, q)\,\vartheta_3(y, q) - \vartheta_2(0, q)\,\vartheta_2(x + y, q)\,\vartheta_3(0, q)\,\vartheta_3(y - x, q) - \vartheta_1(x, q)\,\vartheta_1(y, q)\,\vartheta_4(x, q)\,\vartheta_4(y, q) == 0$$

09.01.18.0119.01

$$\vartheta_1(x + y, q)\,\vartheta_2(y - x, q)\,\vartheta_3(0, q)\,\vartheta_4(0, q) - \vartheta_1(y, q)\,\vartheta_2(y, q)\,\vartheta_3(x, q)\,\vartheta_4(x, q) - \vartheta_1(x, q)\,\vartheta_2(x, q)\,\vartheta_3(y, q)\,\vartheta_4(y, q) == 0$$

09.01.18.0120.01

$$\vartheta_1(y - x, q)\,\vartheta_2(x + y, q)\,\vartheta_3(0, q)\,\vartheta_4(0, q) - \vartheta_1(y, q)\,\vartheta_2(y, q)\,\vartheta_3(x, q)\,\vartheta_4(x, q) + \vartheta_1(x, q)\,\vartheta_2(x, q)\,\vartheta_3(y, q)\,\vartheta_4(y, q) == 0$$

Automatically generated double angle formulas

09.01.18.0121.01

$$\vartheta_2(x, q)^4 + \vartheta_3(x, q)^4 - \vartheta_2(0, q)^3\,\vartheta_2(2\,x, q) - \vartheta_3(0, q)^3\,\vartheta_3(2\,x, q) == 0$$

09.01.18.0122.01

$$-\vartheta_2(x, q)^4 + \vartheta_3(x, q)^4 - \vartheta_4(0, q)^3\,\vartheta_4(2\,x, q) == 0$$

09.01.18.0123.01

$$\vartheta_1(x, q)^4 + \vartheta_4(x, q)^4 + \vartheta_2(0, q)^3\,\vartheta_2(2\,x, q) - \vartheta_3(0, q)^3\,\vartheta_3(2\,x, q) == 0$$

09.01.18.0124.01

$$-\vartheta_1(x, q)^4 + \vartheta_4(x, q)^4 - \vartheta_4(0, q)^3\,\vartheta_4(2\,x, q) == 0$$

09.01.18.0125.01

$$\vartheta_1(x, q)^2\,\vartheta_2(x, q)^2 + \vartheta_3(x, q)^2\,\vartheta_4(x, q)^2 - \vartheta_3(0, q)^2\,\vartheta_4(0, q)\,\vartheta_4(2\,x, q) == 0$$

09.01.18.0126.01

$$-\vartheta_1(x, q)^2\,\vartheta_2(x, q)^2 - \vartheta_3(0, q)\,\vartheta_3(2\,x, q)\,\vartheta_4(0, q)^2 + \vartheta_3(x, q)^2\,\vartheta_4(x, q)^2 == 0$$

09.01.18.0127.01

$$-\vartheta_4(0, q)\,\vartheta_4(2\,x, q)\,\vartheta_2(0, q)^2 + \vartheta_1(x, q)^2\,\vartheta_3(x, q)^2 + \vartheta_2(x, q)^2\,\vartheta_4(x, q)^2 == 0$$

09.01.18.0128.01

$$-\vartheta_1(x, q)^2\,\vartheta_3(x, q)^2 - \vartheta_2(0, q)\,\vartheta_2(2\,x, q)\,\vartheta_4(0, q)^2 + \vartheta_2(x, q)^2\,\vartheta_4(x, q)^2 == 0$$

09.01.18.0129.01

$$2\,\vartheta_2(x, q)^2\,\vartheta_3(x, q)^2 - \vartheta_2(0, q)\,\vartheta_3(0, q)\,(\vartheta_2(2\,x, q)\,\vartheta_3(0, q) + \vartheta_2(0, q)\,\vartheta_3(2\,x, q)) == 0$$

09.01.18.0130.01

$$2\,\vartheta_1(x, q)^2\,\vartheta_4(x, q)^2 + \vartheta_2(0, q)\,\vartheta_3(0, q)\,(\vartheta_2(2\,x, q)\,\vartheta_3(0, q) - \vartheta_2(0, q)\,\vartheta_3(2\,x, q)) == 0$$

09.01.18.0131.01

$$-\vartheta_3(0, q)\,\vartheta_3(2\,x, q)\,\vartheta_2(0, q)^2 + \vartheta_2(x, q)^2\,\vartheta_3(x, q)^2 + \vartheta_1(x, q)^2\,\vartheta_4(x, q)^2 == 0$$

09.01.18.0132.01

$$-\vartheta_2(0, q)\,\vartheta_2(2\,x, q)\,\vartheta_3(0, q)^2 + \vartheta_2(x, q)^2\,\vartheta_3(x, q)^2 - \vartheta_1(x, q)^2\,\vartheta_4(x, q)^2 == 0$$

09.01.18.0133.01

$$\vartheta_1(2x, q)\,\vartheta_2(0, q)\,\vartheta_3(0, q)\,\vartheta_4(0, q) - 2\,\vartheta_1(x, q)\,\vartheta_2(x, q)\,\vartheta_3(x, q)\,\vartheta_4(x, q) = 0$$

Identities involving transformation of nome *q*

Equations for $z \to 2z,\ q \to q^4$

09.01.18.0134.01

$$2\,\vartheta_3\left(2z, q^4\right) = \vartheta_3(z, q) + \vartheta_4(z, q)$$

09.01.18.0135.01

$$2\,\vartheta_2\left(2z, q^4\right) = \frac{\sqrt[4]{q^4}}{q}\,(\vartheta_3(z, q) - \vartheta_4(z, q))$$

Equations for $z \to 2z,\ q \to q^2$

General argument

09.01.18.0136.01

$$\vartheta_1\left(2z, q^2\right) = \frac{\vartheta_1(z, q)\,\vartheta_2(z, q)}{\vartheta_4\left(0, q^2\right)}$$

09.01.18.0137.01

$$\vartheta_2\left(2z, q^2\right) = \frac{\vartheta_2(z, q)^2 - \vartheta_1(z, q)^2}{2\,\vartheta_3\left(0, q^2\right)}$$

09.01.18.0138.01

$$\vartheta_2\left(2z, q^2\right) = \frac{\vartheta_3(z, q)^2 - \vartheta_4(z, q)^2}{2\,\vartheta_2\left(0, q^2\right)}$$

09.01.18.0139.01

$$\vartheta_3\left(2z, q^2\right) = \frac{\vartheta_1(z, q)^2 + \vartheta_2(z, q)^2}{2\,\vartheta_2\left(0, q^2\right)}$$

09.01.18.0140.01

$$\vartheta_3\left(2z, q^2\right) = \frac{\vartheta_3(z, q)^2 + \vartheta_4(z, q)^2}{2\,\vartheta_3\left(0, q^2\right)}$$

09.01.18.0141.01

$$\vartheta_4\left(2z, q^2\right) = \frac{\vartheta_3(z, q)\,\vartheta_4(z, q)}{\vartheta_4\left(0, q^2\right)}$$

Argument equal to zero

09.01.18.0142.01

$$2\,\vartheta_1'\left(0, q^2\right)\vartheta_4\left(0, q^2\right) = \vartheta_1'(0, q)\,\vartheta_2(0, q)$$

09.01.18.0143.01

$$2\,\vartheta_2\left(0, q^2\right)\vartheta_3\left(0, q^2\right) = \vartheta_2(0, q)^2$$

09.01.18.0144.01

$$2\,\vartheta_2\left(0,\,q^2\right)^2 = \vartheta_3(0,\,q)^2 - \vartheta_4(0,\,q)^2$$

09.01.18.0145.01

$$2\,\vartheta_3\left(0,\,q^2\right)^2 = \vartheta_3(0,\,q)^2 + \vartheta_4(0,\,q)^2$$

09.01.18.0146.01

$$\vartheta_4\left(0,\,q^2\right)^2 = \vartheta_3(0,\,q)\,\vartheta_4(0,\,q)$$

Equations for $q \to \sqrt{q}$

General argument

09.01.18.0147.01

$$\vartheta_1\left(z,\,\sqrt{q}\right) = \frac{2\,\vartheta_1(z,\,q)\,\vartheta_4(z,\,q)}{\vartheta_2\left(0,\,\sqrt{q}\right)}$$

09.01.18.0148.01

$$\vartheta_2\left(z,\,\sqrt{q}\right) = \frac{2\,\vartheta_2(z,\,q)\,\vartheta_3(z,\,q)}{\vartheta_2\left(0,\,\sqrt{q}\right)}$$

09.01.18.0149.01

$$\vartheta_3\left(z,\,\sqrt{q}\right) = \frac{\vartheta_4(z,\,q)^2 - \vartheta_1(z,\,q)^2}{\vartheta_4\left(0,\,\sqrt{q}\right)}$$

09.01.18.0150.01

$$\vartheta_3\left(z,\,\sqrt{q}\right) = \frac{\vartheta_2(z,\,q)^2 + \vartheta_3(z,\,q)^2}{\vartheta_3\left(0,\,\sqrt{q}\right)}$$

09.01.18.0151.01

$$\vartheta_4\left(z,\,\sqrt{q}\right) = \frac{\vartheta_4(z,\,q)^2 + \vartheta_1(z,\,q)^2}{\vartheta_3\left(0,\,\sqrt{q}\right)}$$

09.01.18.0152.01

$$\vartheta_4\left(z,\,\sqrt{q}\right) = \frac{\vartheta_3(z,\,q)^2 - \vartheta_2(z,\,q)^2}{\vartheta_4\left(0,\,\sqrt{q}\right)}$$

Argument equal to zero

09.01.18.0153.01

$$\vartheta_1'\left(0,\,\sqrt{q}\right)\vartheta_2\left(0,\,\sqrt{q}\right) = 2\,\vartheta_1'(0,\,q)\,\vartheta_4(0,\,q)$$

09.01.18.0154.01

$$\vartheta_3\left(0,\,\sqrt{q}\right)\vartheta_4\left(0,\,\sqrt{q}\right) = \vartheta_4(0,\,q)^2$$

09.01.18.0155.01

$$\vartheta_2\left(0,\,\sqrt{q}\right)^2 = 2\,\vartheta_2(0,\,q)\,\vartheta_3(0,\,q)$$

09.01.18.0156.01

$$\vartheta_3\left(0, \sqrt{q}\right)^2 = \vartheta_2(0, q)^2 + \vartheta_3(0, q)^2$$

09.01.18.0157.01

$$\vartheta_4\left(0, \sqrt{q}\right)^2 = \vartheta_3(0, q)^2 - \vartheta_2(0, q)^2$$

Equations involving integer powers of *q*

09.01.18.0158.01

$$\vartheta_3(x, q^a)\,\vartheta_3(y, q^b) = \sum_{r=0}^{a+b-1} q^{b r^2} e^{2 r i y}\,\vartheta_3\left(x + y + b \pi r \tau, q^{a+b}\right)\vartheta_3\left(-b x + a y + a b \pi r \tau, q^{a b (a+b)}\right) /; \{a, b\} \in \mathbb{Z}^+ \bigwedge q = e^{i \pi \tau}$$

09.01.18.0159.01

$$\vartheta_3(x, q^a)\,\vartheta_3(y, q^b) = \sum_{r=0}^{a+b-1} q^{a r^2} e^{2 r i x}\,\vartheta_3\left(x + y + a \pi r \tau, q^{a+b}\right)\vartheta_3\left(b x - a y + a b \pi r \tau, q^{a b (a+b)}\right) /; \{a, b\} \in \mathbb{Z}^+ \bigwedge q = e^{i \pi \tau}$$

09.01.18.0160.01

$$\vartheta_4(x, q^a)\,\vartheta_4(y, q^b) = \sum_{r=0}^{a+b-1} (-1)^r q^{b r^2} e^{2 r i y}\,\vartheta_3\left(x + y + b \pi r \tau, q^{a+b}\right)\vartheta_3\left(-b x + a y + a b \pi r \tau + \frac{1}{2} \pi ((a-b) \bmod 2), q^{a b (a+b)}\right) /; \{a, b\} \in \mathbb{Z}^+ \bigwedge q = e^{i \pi \tau}$$

09.01.18.0161.01

$$\vartheta_4(x, q^a)\,\vartheta_4(y, q^b) = \sum_{r=0}^{a+b-1} (-1)^r q^{a r^2} e^{2 r i x}\,\vartheta_3\left(x + y + a \pi r \tau, q^{a+b}\right)\vartheta_3\left(b x - a y + a b \pi r \tau + \frac{1}{2} \pi ((a-b) \bmod 2), q^{a b (a+b)}\right) /; \{a, b\} \in \mathbb{Z}^+ \bigwedge q = e^{i \pi \tau}$$

Algebraic addition theorems involving q^2

09.01.18.0162.01

$$\vartheta_3(x, q)\,\vartheta_3(y, q) = \vartheta_2\left(x - y, q^2\right)\vartheta_2\left(x + y, q^2\right) + \vartheta_3\left(x - y, q^2\right)\vartheta_3\left(x + y, q^2\right)$$

09.01.18.0163.01

$$\vartheta_2(x, q)\,\vartheta_2(y, q) = \vartheta_2\left(x + y, q^2\right)\vartheta_3\left(x - y, q^2\right) + \vartheta_3\left(x + y, q^2\right)\vartheta_2\left(x - y, q^2\right)$$

Landen's transformation

09.01.18.0164.01

$$\frac{\vartheta_3(z, q)\,\vartheta_4(z, q)}{\vartheta_4\left(2 z, q^2\right)} = \frac{\vartheta_3(0, q)\,\vartheta_4(0, q)}{\vartheta_4\left(0, q^2\right)}$$

09.01.18.0165.01

$$\frac{\vartheta_2(z, q)\,\vartheta_1(z, q)}{\vartheta_1\left(2 z, q^2\right)} = \frac{\vartheta_3(0, q)\,\vartheta_4(0, q)}{\vartheta_4\left(0, q^2\right)}$$

Differential identities

09.01.18.0166.01

$$\frac{\vartheta_1^{(3)}(0, q)}{\vartheta_1'(0, q)} = \frac{\vartheta_2''(0, q)}{\vartheta_2(0, q)} + \frac{\vartheta_3''(0, q)}{\vartheta_3(0, q)} + \frac{\vartheta_4''(0, q)}{\vartheta_4(0, q)}$$

09.01.18.0167.01

$$\frac{\vartheta_2^{(4)}(0,q)}{\vartheta_2(0,q)} - \frac{3\,\vartheta_2''(0,q)^2}{\vartheta_2(0,q)^2} = -2\,\vartheta_3(0,q)^4\,\vartheta_4(0,q)^4$$

09.01.18.0168.01

$$\frac{\vartheta_2^{(4)}(0,q)}{\vartheta_2(0,q)} - \frac{3\,\vartheta_2''(0,q)^2}{\vartheta_2(0,q)^2} = -\frac{32\,\omega_1^4}{\pi^4}\,(e_1-e_2)\,(e_1-e_3)\;/;$$

$$\{\omega_1,\omega_2,\omega_3\} = \{\omega_1(g_2,g_3),\,-\omega_1(g_2,g_3)-\omega_3(g_2,g_3),\,\omega_3(g_2,g_3)\} \bigwedge q = \exp\left(\pi\,i\,\frac{\omega_3}{\omega_1}\right) \bigwedge e_n = \wp(\omega_n;g_2,g_3) \bigwedge n \in \{1,2,3\}$$

09.01.18.0169.01

$$\frac{\vartheta_3^{(4)}(0,q)}{\vartheta_3(0,q)} - \frac{3\,\vartheta_3''(0,q)^2}{\vartheta_3(0,q)^2} = 2\,\vartheta_2(0,q)^4\,\vartheta_4(0,q)^4$$

09.01.18.0170.01

$$\frac{\vartheta_3^{(4)}(0,q)}{\vartheta_3(0,q)} - \frac{3\,\vartheta_3''(0,q)^2}{\vartheta_3(0,q)^2} = \frac{32\,\omega_1^4}{\pi^4}\,(e_1-e_2)\,(e_2-e_3)\;/;$$

$$\{\omega_1,\omega_2,\omega_3\} = \{\omega_1(g_2,g_3),\,-\omega_1(g_2,g_3)-\omega_3(g_2,g_3),\,\omega_3(g_2,g_3)\} \bigwedge q = \exp\left(\pi\,i\,\frac{\omega_3}{\omega_1}\right) \bigwedge e_n = \wp(\omega_n;g_2,g_3) \bigwedge n \in \{1,2,3\}$$

09.01.18.0171.01

$$\frac{\vartheta_4^{(4)}(0,q)}{\vartheta_4(0,q)} - \frac{3\,\vartheta_4''(0,q)^2}{\vartheta_4(0,q)^2} = -2\,\vartheta_2(0,q)^4\,\vartheta_3(0,q)^4$$

09.01.18.0172.01

$$\frac{\vartheta_4^{(4)}(0,q)}{\vartheta_4(0,q)} - \frac{3\,\vartheta_4''(0,q)^2}{\vartheta_4(0,q)^2} = -\frac{32\,\omega_1^4}{\pi^4}\,(e_1-e_3)\,(e_2-e_3)\;/;$$

$$\{\omega_1,\omega_2,\omega_3\} = \{\omega_1(g_2,g_3),\,-\omega_1(g_2,g_3)-\omega_3(g_2,g_3),\,\omega_3(g_2,g_3)\} \bigwedge q = \exp\left(\pi\,i\,\frac{\omega_3}{\omega_1}\right) \bigwedge e_n = \wp(\omega_n;g_2,g_3) \bigwedge n \in \{1,2,3\}$$

09.01.18.0173.01

$$\vartheta_1'(v,q)\,\vartheta_{i+1}(v,q) - \vartheta_1(v,q)\,\vartheta_{i+1}'(v,q) = \vartheta_{i+1}(0,q)^2\,\vartheta_{j+1}(v,q)\,\vartheta_{k+1}(v,q)\;/;\;\{i,j,k\} \in \{1,2,3\} \bigwedge i \neq j \neq k$$

09.01.18.0174.01

$$\vartheta_{k+1}'(v,q)\,\vartheta_{j+1}(v,q) - \vartheta_{k+1}(v,q)\,\vartheta_{j+1}'(v,q) = \vartheta_{i+1}(0,q)^2\,\vartheta_1(v,q)\,\vartheta_{i+1}(v,q)\;/;\;\{i,j,k\} \in \{1,2,3\} \bigwedge i \neq j \neq k$$

Differentiation

Low-order differentiation

With respect to *z*

09.01.20.0001.01

$$\frac{\partial \vartheta_1(z,q)}{\partial z} = \vartheta_1'(z,q)$$

09.01.20.0002.01

$$\frac{\partial^2 \vartheta_1(z,q)}{\partial z^2} = 2\sqrt[4]{q}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k-1} q^{k(k+1)} (2k+1)^2 \sin((2k+1)z) \text{ /; } |q|<1$$

With respect to *q*

09.01.20.0009.01

$$\frac{\partial \vartheta_1(z,q)}{\partial q} = -\frac{1}{4q}\vartheta_3(0,q)^2 \vartheta_4(0,q)^2 \frac{\vartheta_2(z,q)^2}{\vartheta_1(z,q)} - \frac{\vartheta_1'(z,q)^2}{4q\,\vartheta_1(z,q)} + \frac{1}{q\pi^2}\vartheta_1(z,q)\left(\frac{\pi^2}{12}\left(\vartheta_3(0,q)^4+\vartheta_4(0,q)^4\right)+\zeta\left(1; g_2\left(1,\frac{\log(q)}{\pi i}\right), g_3\left(1,\frac{\log(q)}{\pi i}\right)\right)\right)$$

09.01.20.0003.01

$$\frac{\partial \vartheta_1(z,q)}{\partial q} = \frac{\vartheta_1(z,q)}{4q} + 2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k k(k+1) q^{k(k+1)-\frac{3}{4}} \sin((2k+1)z) \text{ /; } |q|<1$$

09.01.20.0004.01

$$\frac{\partial^2 \vartheta_1(z,q)}{\partial q^2} = 2q^{-\frac{7}{4}}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k q^{k(k+1)}\left(k^2+k-\frac{3}{4}\right)\left(k^2+k+\frac{1}{4}\right)\sin((2k+1)z) \text{ /; } |q|<1$$

Symbolic differentiation

With respect to *z*

09.01.20.0005.01

$$\frac{\partial^n \vartheta_1(z,q)}{\partial z^n} = 2\sqrt[4]{q}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k q^{k(k+1)}(2k+1)^n \sin\left(\frac{\pi n}{2}+(2k+1)z\right) \text{ /; } |q|<1 \land n\in\mathbb{N}^+$$

With respect to *q*

09.01.20.0006.01

$$\frac{\partial^n \vartheta_1(z,q)}{\partial q^n} = 2q^{\frac{1}{4}-n}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k q^{k(k+1)}\left(k(k+1)-n+\frac{5}{4}\right)_n \sin((2k+1)z) \text{ /; } |q|<1 \land n\in\mathbb{N}^+$$

Fractional integro-differentiation

With respect to *z*

09.01.20.0007.01

$$\frac{\partial^\alpha \vartheta_1(z,q)}{\partial z^\alpha} = 2^\alpha\sqrt{\pi}\sqrt[4]{q}\, z^{1-\alpha}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k q^{k(k+1)}(2k+1)\, {}_1\tilde{F}_2\left(1; 1-\frac{\alpha}{2}, \frac{3-\alpha}{2}; -\frac{1}{4}(2k+1)^2 z^2\right) \text{ /; } |q|<1$$

With respect to *q*

09.01.20.0008.01

$$\frac{\partial^\alpha \vartheta_1(z,q)}{\partial q^\alpha} = 2q^{\frac{1}{4}-\alpha}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k q^{k(k+1)}\,\Gamma\left(k^2+k+\frac{5}{4}\right)\sin((2k+1)z)}{\Gamma\left(k^2+k-\alpha+\frac{5}{4}\right)} \text{ /; } |q|<1$$

Integration

Indefinite integration

Involving only one direct function

09.01.21.0001.01

$$\int \vartheta_1(z, q)\, dz = -2 \sqrt[4]{q} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k q^{k(k+1)}}{2k+1} \cos((2k+1)z) \;/;\; |q| < 1$$

Involving only one direct function with respect to *q*

09.01.21.0002.01

$$\int \vartheta_1(z, q)\, dq = 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k q^{k(k+1)+\frac{5}{4}} \sin((2k+1)z)}{k(k+1)+\frac{5}{4}} \;/;\; |q| < 1$$

Representations through equivalent functions

With related functions

Involving theta functions

Involving $\vartheta_2(z, q)$

09.01.27.0013.01

$$\vartheta_1(z, q) = -\vartheta_2\left(z + \frac{\pi}{2}, q\right)$$

09.01.27.0001.02

$$\vartheta_1(z, q) = \vartheta_2\left(z - \frac{\pi}{2}, q\right)$$

09.01.27.0005.02

$$\vartheta_1(z, q) = (-1)^{m-1} \vartheta_2\left(\frac{1}{2}\pi(2m+1) + z, q\right) \;/;\; m \in \mathbb{Z}$$

Involving $\vartheta_3(z, q)$

09.01.27.0004.02

$$\vartheta_1(z, q) = -i \sqrt[4]{q}\; e^{iz} \vartheta_3\left(z + \frac{1}{2}\pi(\tau+1), q\right) \;/;\; q = e^{i\pi\tau}$$

09.01.27.0014.01

$$\vartheta_1(z, q) = -i^{2m+1} e^{i(2m+1)z} q^{\left(m+\frac{1}{2}\right)^2} \vartheta_3\left(z + \frac{1}{2}\pi(2m\tau+\tau+1), q\right) \;/;\; m \in \mathbb{Z} \bigwedge q = e^{i\pi\tau}$$

09.01.27.0015.01

$$\vartheta_1(z, q) = -i\, e^{iz} \sqrt[4]{q}\; \vartheta_3\left(z + \frac{1}{2}(\pi - i\log(q)), q\right)$$

09.01.27.0016.01

$$\vartheta_1(z, q) = -i^{2m+1} e^{i(2m+1)z} q^{\left(m+\frac{1}{2}\right)^2} \vartheta_3\left(z + \frac{1}{2}(\pi - i(2m+1)\log(q)), q\right) \;/;\; m \in \mathbb{Z}$$

Involving $\vartheta_4(z, q)$

09.01.27.0002.02

$$\vartheta_1(z, q) = i\, e^{-i z} \sqrt[4]{q}\; \vartheta_4\left(z + \frac{\pi \tau}{2}, q\right) /;\; q = e^{-i \pi \tau}$$

09.01.27.0006.02

$$\vartheta_1(z, q) = i^{2m+1} e^{-i(2m+1)z} q^{\left(m+\frac{1}{2}\right)^2} \vartheta_4\left(z + \frac{1}{2}(\pi \tau)(2m+1), q\right) /;\; m \in \mathbb{Z} \bigwedge q = e^{-i \pi \tau}$$

09.01.27.0003.02

$$\vartheta_1(z, q) = i \sqrt[4]{q}\; e^{-i z} \vartheta_4\left(z + \frac{1}{2} i \log(q), q\right)$$

09.01.27.0007.02

$$\vartheta_1(z, q) = i^{2m+1} q^{m^2+m+\frac{1}{4}} e^{-(2m+1) i z} \vartheta_4\left(\frac{1}{2}(i \log(q))(2m+1) + z, q\right) /;\; m \in \mathbb{Z}$$

Involving Jacobi functions

09.01.27.0017.01

$$\frac{\vartheta_1(z, q(m))}{\vartheta_2(z, q(m))} = \sqrt[4]{1-m}\; \operatorname{sc}\left(\frac{2 K(m) z}{\pi} \middle| m\right)$$

09.01.27.0018.01

$$\frac{\vartheta_1(z, q(m))}{\vartheta_3(z, q(m))} = \sqrt[4]{m(1-m)}\; \operatorname{sd}\left(\frac{2 K(m) z}{\pi} \middle| m\right)$$

09.01.27.0009.01

$$\frac{\vartheta_1(z, q(m))}{\vartheta_4(z, q(m))} = \sqrt[4]{m}\; \operatorname{sn}\left(\frac{2 K(m) z}{\pi} \middle| m\right)$$

Involving Weierstrass functions

09.01.27.0010.01

$$\vartheta_1(z, q) = \frac{\pi}{\omega_1} \sqrt[4]{q}\; \exp\left(-\frac{2 \eta_1 \omega_1 z^2}{\pi^2}\right) \left(\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - q^{2n}\right)\right)^3 \sigma\left(\frac{2 \omega_1 z}{\pi}; g_2, g_3\right) /;$$

$$\{\omega_1, \omega_3\} = \{\omega_1(g_2, g_3), \omega_3(g_2, g_3)\} \bigwedge \eta_1 = \zeta(\omega_1; g_2, g_3) \bigwedge q = \exp\left(\frac{\pi i \omega_3}{\omega_1}\right)$$

09.01.27.0011.01

$$\frac{\vartheta_1(z, q)}{\vartheta_1'(0, q)} = \frac{\pi}{2 \omega_1} \exp\left(-\frac{2 \eta_1 \omega_1 z^2}{\pi^2}\right) \sigma\left(\frac{2 \omega_1 z}{\pi}; g_2, g_3\right) /;$$

$$\{\omega_1, \omega_3\} = \{\omega_1(g_2, g_3), \omega_3(g_2, g_3)\} \bigwedge \eta_1 = \zeta(\omega_1; g_2, g_3) \bigwedge q = \exp\left(\frac{\pi i \omega_3}{\omega_1}\right)$$

09.01.27.0012.01

$$\frac{\vartheta_1'(z, q)}{\vartheta_1(z, q)} = \frac{2 \omega_1}{\pi} \zeta\left(\frac{2 \omega_1 z}{\pi}; g_2, g_3\right) - \frac{4 \eta_1 \omega_1 z}{\pi^2} /;\; \{\omega_1, \omega_3\} = \{\omega_1(g_2, g_3), \omega_3(g_2, g_3)\} \bigwedge \eta_1 = \zeta(\omega_1; g_2, g_3) \bigwedge q = \exp\left(\frac{\pi i \omega_3}{\omega_1}\right)$$

Zeros

09.01.30.0003.01

$\vartheta_1(z, 0) == 0$

09.01.30.0002.01

$\vartheta_1(0, q) == 0$

09.01.30.0004.01

$\vartheta_1(m\,\pi, q) == 0 /; m \in \mathbb{Z}$

09.01.30.0001.01

$\vartheta_1(m\,\pi + n\,\tau, q) == 0 /; \{m, n\} \in \mathbb{Z} \bigwedge q == e^{i\,\pi\,\tau}$

Theorems

The Green's function for the Laplace operator in the rectangle

The Green's function $G(x, x', y, y')$ for the Laplace operator in the rectangle $(0, a) \times (0, b)$ is given as:

$$G(x, x', y, y') = \frac{1}{2\,\pi} \operatorname{Re}\left(\log\left(\frac{\vartheta_1\left(\frac{\pi\,(x+i\,y+x'-i\,y')}{2\,a}, e^{-\pi\,b/a}\right)\vartheta_1\left(\frac{\pi\,(x+i\,y-x'+i\,y')}{2\,a}, e^{-\pi\,b/a}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{\pi\,(x+i\,y-x'-i\,y')}{2\,a}, e^{-\pi\,b/a}\right)\vartheta_1\left(\frac{\pi\,(x+i\,y+x'+i\,y')}{2\,a}, e^{-\pi\,b/a}\right)}\right)\right)$$

Zolotarev's problem

Zolotarev's problem, $\min_{a_2, a_3, \ldots, a_n} \max_{-1 \le x \le 1} \left| x^n - n\,\sigma\,t^{n-1} + a_2\,t^{n-2} + \ldots + a_n \right|$ can be solved in closed form using elliptic theta functions.

History

– J. Bernoulli (1713)
– L. Euler; J. Fourier
– C. G. J. Jacobi (1827)
– C. W. Borchardt (1838)
– K. Weierstrass (1862–1863)

Copyright