

SixJSymbol

View the online version at

● functions.wolfram.com

Download the

● PDF File

Notations

Traditional name

Racah 6 - j symbol

Traditional notation

$$\left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{matrix} \right\}$$

Mathematica StandardForm notation

SixJSymbol[$\{j_1, j_2, j_3\}, \{j_4, j_5, j_6\}$]

Primary definition

07.40.02.0001.01

$$\left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{matrix} \right\} = (-1)^{-j_1-j_2-j_4-j_5} \pi \csc(\pi(j_1+j_2+j_4+j_5))$$

$$\frac{\left(\sqrt{(j_1-j_2+j_3)!} \sqrt{(-j_1+j_2+j_3)!} \sqrt{(j_3+j_4-j_5)!} \sqrt{(j_3-j_4+j_5)!} \sqrt{(j_2-j_4+j_6)!} \sqrt{(-j_2+j_4+j_6)!} \right.}{\left. \sqrt{(j_1-j_5+j_6)!} \sqrt{(-j_1+j_5+j_6)!} \right) / \left(\sqrt{(j_1+j_2-j_3)!} \sqrt{(1+j_1+j_2+j_3)!} \sqrt{(-j_3+j_4+j_5)!} \right.}$$

$$\left. \sqrt{(1+j_3+j_4+j_5)!} \sqrt{(j_2+j_4-j_6)!} \sqrt{(j_1+j_5-j_6)!} \sqrt{(1+j_2+j_4+j_6)!} \sqrt{(1+j_1+j_5+j_6)!} \right)$$

$${}_4\tilde{F}_3(-j_1-j_2+j_3, j_3-j_4-j_5, -j_2-j_4+j_6, -j_1-j_5+j_6; -j_1-j_2-j_4-j_5-1, -j_1+j_3-j_4+j_6+1, -j_2+j_3-j_5+j_6+1; 1) / \mathcal{P}hysicalQ(\{j_1, j_2, j_3\}, \{j_4, j_5, j_6\})$$

07.40.02.0002.01

$$\left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{matrix} \right\} = 0 /; \neg \mathcal{P}hysicalQ(\{j_1, j_2, j_3\}, \{j_4, j_5, j_6\})$$

$\left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{matrix} \right\}$ is the Racah 6 j symbol. The Racah 6 j symbol appears in the quantum mechanical treatment of angular momentum. The values of the Racah 6 j symbol which are physically realizable (in a Minkowski space-time) are obtained under the additional restrictions:

07.40.02.0003.01

$$\mathcal{P}hysicalQ(\{j_1, j_2, j_3\}, \{j_4, j_5, j_6\}) = \mathcal{T}riangularQ(j_1, j_2, j_3) \wedge \mathcal{T}riangularQ(j_1, j_5, j_6) \wedge \mathcal{T}riangularQ(j_2, j_4, j_6) \wedge \mathcal{T}riangularQ(j_3, j_4, j_5)$$

where

$$\text{TriangularQ}[j_1, j_2, j_3] == 2 j_1 \in \text{Integers} \wedge j_1 \geq 0 \wedge 2 j_2 \in \text{Integers} \wedge j_2 \geq 0 \wedge 2 j_3 \in \text{Integers} \wedge j_3 \geq 0 \wedge j_1 + j_2 + j_3 \in \text{Integers} \wedge \text{Abs}[j_1 - j_2] \leq j_3 \leq j_1 + j_2$$

07.40.02.0004.01

$$\text{TriangularQ}(j_1, j_2, j_3) = 2 j_1 \in \mathbb{N} \wedge 2 j_2 \in \mathbb{N} \wedge 2 j_3 \in \mathbb{N} \wedge j_1 + j_2 + j_3 \in \mathbb{N} \wedge |j_1 - j_2| \leq j_3 \leq j_1 + j_2$$

Specific values

Values at fixed points

07.40.03.0001.01

$$\left\{ \begin{array}{ccc} j_1 & j_2 & j_1 - 3 j_2 - 1 \\ j_4 & -j_1 + 3 j_2 - j_4 & j_6 \end{array} \right\} = (-1)^{-2 j_1 - 2 j_4} \frac{\sqrt{(4 j_2 + 1)!} \sqrt{(j_2 - j_4 + j_6)!} \sqrt{(2 j_1 - 3 j_2 + j_4 + j_6)!}}{\sqrt{(2 j_1 - 2 j_2)!} \sqrt{(1 + 3 j_2 - j_4 + j_6)!} \sqrt{(1 + j_2 + j_4 + j_6)!}} \left(\begin{array}{ccc} 2 j_2 - j_1 & j_2 & j_1 - 3 j_2 - 1 \\ -j_1 + j_2 - j_4 + j_6 & 2 j_2 - j_4 - j_6 & j_1 - 3 j_2 + 2 j_4 \end{array} \right)$$

One argument equal to zero

07.40.03.0002.01

$$\left\{ \begin{array}{ccc} 0 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{array} \right\} = \frac{(-1)^{j_2 + j_4 + j_5} \delta_{j_2, j_3} \delta_{j_5, j_6}}{\sqrt{2 j_2 + 1} \sqrt{2 j_5 + 1}} /; \text{PhysicalQ}(\{0, j_2, j_3\}, \{j_4, j_5, j_6\})$$

07.40.03.0003.01

$$\left\{ \begin{array}{ccc} j_1 & 0 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{array} \right\} = \frac{(-1)^{j_1 + j_4 + j_5} \delta_{j_1, j_3} \delta_{j_4, j_6}}{\sqrt{2 j_1 + 1} \sqrt{2 j_4 + 1}} /; \text{PhysicalQ}(\{j_1, 0, j_3\}, \{j_4, j_5, j_6\})$$

07.40.03.0004.01

$$\left\{ \begin{array}{ccc} j_1 & j_2 & 0 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{array} \right\} = \frac{(-1)^{j_1 + j_5 + j_6} \delta_{j_1, j_2} \delta_{j_4, j_5}}{\sqrt{2 j_1 + 1} \sqrt{2 j_4 + 1}} /; \text{PhysicalQ}(\{j_1, j_2, 0\}, \{j_4, j_5, j_6\})$$

07.40.03.0005.01

$$\left\{ \begin{array}{ccc} j_1 & j_2 & j_3 \\ 0 & j_5 & j_6 \end{array} \right\} = \frac{(-1)^{j_1 + j_2 + j_5} \delta_{j_2, j_6} \delta_{j_3, j_5}}{\sqrt{2 j_2 + 1} \sqrt{2 j_3 + 1}} /; \text{PhysicalQ}(\{j_1, j_2, j_3\}, \{0, j_5, j_6\})$$

07.40.03.0006.01

$$\left\{ \begin{array}{ccc} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & 0 & j_6 \end{array} \right\} = \frac{(-1)^{j_1 + j_2 + j_4} \delta_{j_1, j_6} \delta_{j_3, j_4}}{\sqrt{2 j_1 + 1} \sqrt{2 j_3 + 1}} /; \text{PhysicalQ}(\{j_1, j_2, j_3\}, \{j_4, 0, j_6\})$$

07.40.03.0007.01

$$\left\{ \begin{array}{ccc} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & 0 \end{array} \right\} = \frac{(-1)^{j_1 + j_2 + j_5} \delta_{j_1, j_5} \delta_{j_2, j_4}}{\sqrt{2 j_1 + 1} \sqrt{2 j_2 + 1}} /; \text{PhysicalQ}(\{j_1, j_2, j_3\}, \{j_4, j_5, 0\})$$

One argument equal to sum of two others

07.40.03.0008.01

$$\left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_1 + j_2 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{matrix} \right\} = \frac{(-1)^{j_1+j_2+j_4+j_5} \sqrt{(2j_1)!} \sqrt{(2j_2)!} \sqrt{(j_1+j_2+j_4+j_5+1)!}}{\sqrt{(j_1+j_2-j_4+j_5)!} \sqrt{(j_1+j_2+j_4-j_5)!} \sqrt{(-j_1+j_5+j_6)!} \sqrt{(-j_2+j_4+j_6)!}} \Big/ \\ \left(\sqrt{(2j_1+2j_2+1)!} \sqrt{(-j_1-j_2+j_4+j_5)!} \sqrt{(j_1+j_5-j_6)!} \sqrt{(j_1-j_5+j_6)!} \sqrt{(j_1+j_5+j_6+1)!} \right. \\ \left. \sqrt{(j_2+j_4-j_6)!} \sqrt{(j_2-j_4+j_6)!} \sqrt{(j_2+j_4+j_6+1)!} \right) /; \mathcal{P}hysicalQ(\{j_1, j_2, j_1+j_2\}, \{j_4, j_5, j_6\})$$

07.40.03.0009.01

$$\left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_1 + j_2 \\ j_1 & j_5 & j_1 + j_2 \end{matrix} \right\} = \frac{(-1)^{2j_1+j_2+j_5} (2j_1)! (j_2+j_5)!}{(2j_1+2j_2+1)! (-j_2+j_5)!} /; \mathcal{P}hysicalQ(\{j_1, j_2, j_1+j_2\}, \{j_1, j_5, j_1+j_2\})$$

07.40.03.0010.01

$$\left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_1 + j_2 \\ j_1 & j_5 & j_1 + j_2 - 1 \end{matrix} \right\} = \frac{(-1)^{2j_1+j_2+j_5} (2j_1-1)! (j_2+j_5-1)!}{(2j_1+2j_2)! (-j_2+j_5)!} \frac{2\sqrt{j_1} \sqrt{j_2} \sqrt{j_2+j_5} \sqrt{2j_1+j_2-j_5} \sqrt{2j_1+j_2+j_5+1}}{\sqrt{2j_1+2j_2+1} \sqrt{-j_2+j_5+1}} /; \\ \mathcal{P}hysicalQ(\{j_1, j_2, j_1+j_2\}, \{j_1, j_5, j_1+j_2-1\})$$

07.40.03.0011.01

$$\left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_1 + j_2 \\ j_1 & j_2 & j_6 \end{matrix} \right\} = \frac{(-1)^{2j_1+2j_2} (2j_1)! (2j_2)!}{(j_1+j_2-j_6)! (j_1+j_2+j_6+1)!} /; \mathcal{T}riangularQ(j_1, j_2, j_6)$$

07.40.03.0012.01

$$\left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_1 + j_2 \\ j_2 & j_1 & j_6 \end{matrix} \right\} = \frac{(-1)^{2j_1+2j_2} (2j_1)! (2j_2)!}{\sqrt{(2j_1-j_6)!} \sqrt{(2j_1+j_6+1)!} \sqrt{(2j_2-j_6)!} \sqrt{(2j_2+j_6+1)!}} /; \\ \mathcal{P}hysicalQ(\{j_1, j_2, j_1+j_2\}, \{j_2, j_1, j_6\})$$

07.40.03.0013.01

$$\left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_1 + j_2 \\ j_1 & j_2 & j_1 + j_2 \end{matrix} \right\} = \frac{(-1)^{2j_1+2j_2} (2j_1)! (2j_2)!}{(2j_1+2j_2+1)!} /; 2j_1 \in \mathbb{N} \wedge 2j_2 \in \mathbb{N}$$

07.40.03.0014.01

$$\left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_1 + j_2 \\ j_1 & j_2 & j_1 + j_2 - 1 \end{matrix} \right\} = \frac{(-1)^{2j_1+2j_2} (2j_1)! (2j_2)!}{(2j_1+2j_2)!} /; 2j_1 \in \mathbb{N}^+ \wedge 2j_2 \in \mathbb{N}^+$$

07.40.03.0015.01

$$\left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_1 + j_2 \\ j_1 & j_2 & j_1 - j_2 \end{matrix} \right\} = \frac{(-1)^{2j_1+2j_2}}{2j_1+1} /; \mathcal{P}hysicalQ(\{j_1, j_2, j_1+j_2\}, \{j_1, j_2, j_1-j_2\})$$

07.40.03.0016.01

$$\left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_1 + j_2 \\ j_1 & j_2 & j_1 - j_2 + 1 \end{matrix} \right\} = \frac{(-1)^{2j_1+2j_2} j_2}{(2j_1+1)(j_1+1)} /; \mathcal{P}hysicalQ(\{j_1, j_2, j_1+j_2\}, \{j_1, j_2, j_1-j_2+1\})$$

07.40.03.0017.01

$$\left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_1 + j_2 \\ j_1 + j_2 + j_5 & j_5 & j_1 + j_5 \end{matrix} \right\} = \frac{(-1)^{2j_1+2j_2+2j_5}}{\sqrt{2j_1+2j_2+1} \sqrt{2j_1+2j_5+1}} /; \mathcal{P}hysicalQ(\{j_1, j_2, j_1+j_2\}, \{j_1+j_2+j_5, j_5, j_1+j_5\})$$

One argument less than sum of two others by unity

07.40.03.0018.01

$$\left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_1 + j_2 - 1 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{matrix} \right\} = (-1)^{j_1 + j_2 + j_4 + j_5} 2(j_1 j_2 (j_1 + j_2) + (j_1 + j_2) j_6 (j_6 + 1) - j_1 j_4 (j_4 + 1) - j_2 j_5 (j_5 + 1)) \left(\sqrt{(2j_1 - 1)!} \sqrt{(2j_2 - 1)!} \sqrt{(j_1 + j_2 + j_4 + j_5)!} \sqrt{(j_1 + j_2 - j_4 + j_5 - 1)!} \sqrt{(j_1 + j_2 + j_4 - j_5 - 1)!} \sqrt{(-j_1 + j_5 + j_6)!} \sqrt{(-j_2 + j_4 + j_6)!} \right) / \left(\sqrt{(2j_1 + 2j_2)!} \sqrt{(-j_1 - j_2 + j_4 + j_5 + 1)!} \sqrt{(j_1 + j_5 - j_6)!} \sqrt{(j_1 - j_5 + j_6)!} \sqrt{(j_1 + j_5 + j_6 + 1)!} \sqrt{(j_2 + j_4 - j_6)!} \sqrt{(j_2 - j_4 + j_6)!} \sqrt{(j_2 + j_4 + j_6 + 1)!} \right) /; \text{PhysicalQ}(\{j_1, j_2, j_1 + j_2 - 1\}, \{j_4, j_5, j_6\})$$

07.40.03.0019.01

$$\left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_1 + j_2 - 1 \\ j_4 & j_5 & j_1 + j_5 - 1 \end{matrix} \right\} = (-1)^{j_1 + j_2 + j_4 + j_5} 2(j_1 (j_1 + j_2 + j_5 - 1) (j_1 + j_2 + j_5) - j_1 j_4 (j_4 + 1) - 2 j_2 j_5) \sqrt{(2j_2 - 1)!} \sqrt{(2j_5 - 1)!} \sqrt{(j_1 + j_2 + j_4 - j_5 - 1)!} \sqrt{(j_1 - j_2 + j_4 + j_5 - 1)!} / \left(\sqrt{(2j_1 + 2j_2)!} \sqrt{(2j_1 + 2j_5)!} \sqrt{(-j_1 - j_2 + j_4 + j_5 + 1)!} \sqrt{(-j_1 + j_2 + j_4 - j_5 + 1)!} \right) /; \text{PhysicalQ}(\{j_1, j_2, j_1 + j_2 - 1\}, \{j_4, j_5, j_1 + j_5 - 1\})$$

07.40.03.0020.01

$$\left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_1 + j_2 - 1 \\ j_1 & j_5 & j_1 + j_2 - 1 \end{matrix} \right\} = (-1)^{2j_1 + j_2 + j_5} 2(j_2 (2j_1 + j_2 - 1) (2j_1 + j_2) - j_2 j_5 (j_5 + 1) - 2 j_1^2) \frac{(2j_1 - 1)! (j_2 + j_5 - 1)!}{(2j_1 + 2j_2)! (-j_2 + j_5 + 1)!} /; \text{PhysicalQ}(\{j_1, j_2, j_1 + j_2 - 1\}, \{j_1, j_5, j_1 + j_2 - 1\})$$

07.40.03.0021.01

$$\left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_1 + j_2 - 1 \\ j_1 & j_2 & j_6 \end{matrix} \right\} = (-1)^{2j_1 + 2j_2} 2(j_1 j_2 (j_1 + j_2) + (j_1 + j_2) j_6 (j_6 + 1) - j_1^2 (j_1 + 1) - j_2^2 (j_2 + 1)) \frac{(2j_1 - 1)! (2j_2 - 1)!}{(j_1 + j_2 - j_6)! (j_1 + j_2 + j_6 + 1)!} /; \text{PhysicalQ}(\{j_1, j_2, j_1 + j_2 - 1\}, \{j_1, j_2, j_6\})$$

07.40.03.0022.01

$$\left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_1 + j_2 - 1 \\ j_2 & j_1 & j_6 \end{matrix} \right\} = \frac{(-1)^{2j_1 + 2j_2} 2((j_1 + j_2) j_6 (j_6 + 1) - 2 j_1 j_2 (2j_1 - 1)! (2j_2 - 1)!)}{\sqrt{(2j_1 - j_6)!} \sqrt{(2j_1 + j_6 + 1)!} \sqrt{(2j_2 - j_6)!} \sqrt{(2j_2 + j_6 + 1)!}} /; \text{PhysicalQ}(\{j_1, j_2, j_1 + j_2 - 1\}, \{j_2, j_1, j_6\})$$

07.40.03.0023.01

$$\left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_1 + j_2 - 1 \\ j_1 + j_2 + j_5 - 1 & j_5 & j_1 + j_5 - 1 \end{matrix} \right\} = \frac{(-1)^{2j_1 + 2j_2 + 2j_5} \sqrt{j_2} \sqrt{j_5}}{\sqrt{j_1 + j_2} \sqrt{j_1 + j_5} \sqrt{2j_1 + 2j_2 - 1} \sqrt{2j_1 + 2j_5 - 1}} /; \text{PhysicalQ}(\{j_1, j_2, j_1 + j_2 - 1\}, \{j_1 + j_2 + j_5 - 1, j_5, j_1 + j_5 - 1\})$$

General characteristics

Domain and analyticity

$\left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{matrix} \right\}$ is a six-argument function. The condition *PhysicalQ* restricts the arguments to integers or half-integers (interpreted as quantum-mechanical spin quantum numbers) that fulfill certain inequalities. Without the condition *PhysicalQ* $\left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{matrix} \right\}$ would be an analytic function in all six arguments.

07.40.04.0001.01

$$((j_1 * j_2 * j_3) * (j_4 * j_5 * j_6)) \rightarrow \left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{matrix} \right\} :: ((\mathbb{Q} \otimes \mathbb{Q} \otimes \mathbb{Q}) \otimes (\mathbb{Q} \otimes \mathbb{Q} \otimes \mathbb{Q})) \rightarrow \mathbb{C}$$

Symmetries and periodicities

Permutation symmetry

07.40.04.0002.01

$$\left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} j_2 & j_1 & j_3 \\ j_5 & j_4 & j_6 \end{matrix} \right\}$$

07.40.04.0003.01

$$\left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} j_5 & j_4 & j_3 \\ j_2 & j_1 & j_6 \end{matrix} \right\}$$

07.40.04.0004.01

$$\left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} j_4 & j_5 & j_3 \\ j_1 & j_2 & j_6 \end{matrix} \right\}$$

07.40.04.0005.01

$$\left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} j_4 & j_2 & j_6 \\ j_1 & j_5 & j_3 \end{matrix} \right\}$$

07.40.04.0006.01

$$\left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} j_2 & j_4 & j_6 \\ j_5 & j_1 & j_3 \end{matrix} \right\}$$

07.40.04.0007.01

$$\left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} j_5 & j_1 & j_6 \\ j_2 & j_4 & j_3 \end{matrix} \right\}$$

07.40.04.0008.01

$$\left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} j_1 & j_5 & j_6 \\ j_4 & j_2 & j_3 \end{matrix} \right\}$$

07.40.04.0009.01

$$\left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} j_1 & j_3 & j_2 \\ j_4 & j_6 & j_5 \end{matrix} \right\}$$

07.40.04.0010.01

$$\left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} j_2 & j_3 & j_1 \\ j_5 & j_6 & j_4 \end{matrix} \right\}$$

07.40.04.0011.01

$$\left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} j_3 & j_1 & j_2 \\ j_6 & j_4 & j_5 \end{matrix} \right\}$$

07.40.04.0012.01

$$\left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} j_3 & j_2 & j_1 \\ j_6 & j_5 & j_4 \end{matrix} \right\}$$

07.40.04.0013.01

$$\begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} j_1 & j_6 & j_5 \\ j_4 & j_3 & j_2 \end{Bmatrix}$$

07.40.04.0014.01

$$\begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} j_5 & j_6 & j_1 \\ j_2 & j_3 & j_4 \end{Bmatrix}$$

07.40.04.0015.01

$$\begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} j_6 & j_1 & j_5 \\ j_3 & j_4 & j_2 \end{Bmatrix}$$

07.40.04.0016.01

$$\begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} j_6 & j_5 & j_1 \\ j_3 & j_2 & j_4 \end{Bmatrix}$$

07.40.04.0017.01

$$\begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} j_4 & j_3 & j_5 \\ j_1 & j_6 & j_2 \end{Bmatrix}$$

07.40.04.0018.01

$$\begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} j_5 & j_3 & j_4 \\ j_2 & j_6 & j_1 \end{Bmatrix}$$

07.40.04.0019.01

$$\begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} j_3 & j_4 & j_5 \\ j_6 & j_1 & j_2 \end{Bmatrix}$$

07.40.04.0020.01

$$\begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} j_3 & j_5 & j_4 \\ j_6 & j_2 & j_1 \end{Bmatrix}$$

07.40.04.0021.01

$$\begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} j_4 & j_6 & j_2 \\ j_1 & j_3 & j_5 \end{Bmatrix}$$

07.40.04.0022.01

$$\begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} j_2 & j_6 & j_4 \\ j_5 & j_3 & j_1 \end{Bmatrix}$$

07.40.04.0023.01

$$\begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} j_6 & j_4 & j_2 \\ j_3 & j_1 & j_5 \end{Bmatrix}$$

07.40.04.0024.01

$$\begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} j_6 & j_2 & j_4 \\ j_3 & j_5 & j_1 \end{Bmatrix}$$

Series representations

Generalized power series

07.40.06.0001.01

$$\left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{matrix} \right\} = (-1)^{-j_1-j_2-j_4-j_5} \pi \csc(\pi(j_1+j_2+j_4+j_5)) \sqrt{(j_1+j_2-j_3)!}$$

$$\sqrt{(-j_3+j_4+j_5)!} \sqrt{(j_2+j_4-j_6)!} \sqrt{(j_1+j_5-j_6)!} \sqrt{(j_1-j_2+j_3)!} \sqrt{(-j_1+j_2+j_3)!}$$

$$\sqrt{(j_3+j_4-j_5)!} \sqrt{(j_3-j_4+j_5)!} \sqrt{(j_2-j_4+j_6)!} \sqrt{(-j_2+j_4+j_6)!} \sqrt{(j_1-j_5+j_6)!}$$

$$\sqrt{(-j_1+j_5+j_6)!} / \left(\sqrt{(j_1+j_2+j_3+1)!} \sqrt{(j_3+j_4+j_5+1)!} \sqrt{(j_2+j_4+j_6+1)!} \sqrt{(j_1+j_5+j_6+1)!} \right)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} 1 / ((-k+j_1+j_2-j_3)! (-k-j_3+j_4+j_5)! (-k+j_2+j_4-j_6)! (-k+j_1+j_5-j_6)! k! (k-j_1-j_2-j_4-j_5-2)!$$

$$(k-j_1+j_3-j_4+j_6)! (k-j_2+j_3-j_5+j_6)!); \text{PhysicalQ}(\{j_1, j_2, j_3\}, \{j_4, j_5, j_6\})$$

07.40.06.0002.01

$$\left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{matrix} \right\} =$$

$$\left(\sqrt{(j_1+j_2-j_3)!} \sqrt{(j_1-j_2+j_3)!} \sqrt{(-j_1+j_2+j_3)!} \sqrt{(j_3+j_4-j_5)!} \sqrt{(j_3-j_4+j_5)!} \sqrt{(-j_3+j_4+j_5)!} \right.$$

$$\left. \sqrt{(j_1+j_5-j_6)!} \sqrt{(j_1-j_5+j_6)!} \sqrt{(-j_1+j_5+j_6)!} \sqrt{(j_2+j_4-j_6)!} \sqrt{(j_2-j_4+j_6)!} \sqrt{(-j_2+j_4+j_6)!} \right) /$$

$$\left(\sqrt{(j_1+j_2+j_3+1)!} \sqrt{(j_3+j_4+j_5+1)!} \sqrt{(j_1+j_5+j_6+1)!} \sqrt{(j_2+j_4+j_6+1)!} \right)$$

$$\sum_{k=\max(j_1+j_2+j_3, j_3+j_4+j_5, j_1+j_5+j_6, j_2+j_4+j_6)}^{\min(j_1+j_2+j_4+j_5, j_1+j_3+j_4+j_6, j_2+j_3+j_5+j_6)} ((-1)^k (k+1)!)$$

$$((k-j_1-j_2-j_3)! (k-j_3-j_4-j_5)! (k-j_1-j_5-j_6)! (k-j_2-j_4-j_6)! (j_1+j_2+j_4+j_5-k)!$$

$$(j_1+j_3+j_4+j_6-k)! (j_2+j_3+j_5+j_6-k)!); \text{PhysicalQ}(\{j_1, j_2, j_3\}, \{j_4, j_5, j_6\})$$

07.40.06.0003.01

$$\left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{matrix} \right\} = (-1)^{j_1+j_2+j_4+j_5}$$

$$\left(\sqrt{(j_1+j_2-j_3)!} \sqrt{(j_1-j_2+j_3)!} \sqrt{(-j_1+j_2+j_3)!} \sqrt{(j_3+j_4-j_5)!} \sqrt{(j_3-j_4+j_5)!} \sqrt{(-j_3+j_4+j_5)!} \right.$$

$$\left. \sqrt{(j_1+j_5-j_6)!} \sqrt{(j_1-j_5+j_6)!} \sqrt{(-j_1+j_5+j_6)!} \sqrt{(j_2+j_4-j_6)!} \sqrt{(j_2-j_4+j_6)!} \sqrt{(-j_2+j_4+j_6)!} \right) /$$

$$\left(\sqrt{(j_1+j_2+j_3+1)!} \sqrt{(j_3+j_4+j_5+1)!} \sqrt{(j_1+j_5+j_6+1)!} \sqrt{(j_2+j_4+j_6+1)!} \right)$$

$$\sum_{k=\max(j_1-j_3+j_4-j_6, j_2-j_3+j_5-j_6)}^{\min(j_1+j_2-j_3, -j_3+j_4+j_5, j_1+j_5-j_6, j_2+j_4-j_6)} ((-1)^k (j_1+j_2+j_4+j_5+1-k)!)$$

$$(k! (j_1+j_2-j_3-k)! (-j_3+j_4+j_5-k)! (j_1+j_5-j_6-k)! (j_2+j_4-j_6-k)!$$

$$(-j_1+j_3-j_4+j_6+k)! (-j_2+j_3-j_5+j_6+k)!); \text{PhysicalQ}(\{j_1, j_2, j_3\}, \{j_4, j_5, j_6\})$$

07.40.06.0004.01

$$\left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{matrix} \right\} = (-1)^{j_1+j_3+j_4+j_6}$$

$$\left(\frac{\sqrt{(j_1+j_5-j_6)!} \sqrt{(j_1-j_5+j_6)!} \sqrt{(-j_1+j_5+j_6)!} \sqrt{(j_2+j_4-j_6)!} \sqrt{(j_2-j_4+j_6)!} \sqrt{(-j_2+j_4+j_6)!}}{\sqrt{(j_1+j_2+j_3+1)!} \sqrt{(j_3+j_4+j_5+1)!}} \right) / \left(\frac{\sqrt{(j_1+j_5+j_6+1)!} \sqrt{(j_2+j_4+j_6+1)!} \sqrt{(j_1+j_2-j_3)!}}{\sqrt{(j_1-j_2+j_3)!} \sqrt{(-j_1+j_2+j_3)!} \sqrt{(j_3+j_4-j_5)!} \sqrt{(j_3-j_4+j_5)!} \sqrt{(-j_3+j_4+j_5)!}} \right)$$

$$\sum_{k=\max(0, j_1-j_2+j_4-j_5, -j_2-j_3-j_5+j_6-1)}^{\min(j_1-j_3+j_4+j_6, j_1-j_5+j_6, -j_2+j_4+j_6)} \frac{(-1)^k (-j_1+j_2+j_3+k)! (j_3-j_4+j_5+k)! (j_1-j_3+j_4+j_6-k)!}{k! (j_1-j_5+j_6-k)! (-j_2+j_4+j_6-k)! (-j_1+j_2-j_4+j_5+k)! (j_2+j_3+j_5-j_6+1+k)!}$$

;/ $\mathcal{P}hysicalQ(\{j_1, j_2, j_3\}, \{j_4, j_5, j_6\})$

07.40.06.0005.01

$$\left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{matrix} \right\} = (-1)^{j_1+j_3+j_4+j_6}$$

$$\left(\frac{\sqrt{(j_1+j_2-j_3)!} \sqrt{(j_1-j_2+j_3)!} \sqrt{(-j_1+j_2+j_3)!} \sqrt{(j_3+j_4+j_5+1)!} \sqrt{(j_2+j_4-j_6)!} \sqrt{(j_2-j_4+j_6)!}}{\sqrt{(-j_2+j_4+j_6)!} \sqrt{(j_1+j_5+j_6+1)!}} \right) / \left(\frac{\sqrt{(j_1+j_2+j_3+1)!} \sqrt{(j_3+j_4-j_5)!} \sqrt{(j_3-j_4+j_5)!}}{\sqrt{(-j_3+j_4+j_5)!} \sqrt{(j_1+j_5-j_6)!} \sqrt{(j_2+j_4+j_6+1)!} \sqrt{(j_1-j_5+j_6)!} \sqrt{(-j_1+j_5+j_6)!}} \right)$$

$$\sum_{k=0}^{\min(j_1-j_2+j_4+j_5, -j_2+j_3+j_5+j_6)} \frac{(-1)^k (j_1-j_2+j_4+j_5-k)! (-j_2+j_3+j_5+j_6-k)! (j_1+j_3+j_4+j_6+1-k)!}{k! (j_1-j_2+j_3-k)! (-j_2+j_4+j_6-k)! (j_1+j_5+j_6+1-k)! (j_3+j_4+j_5+1-k)!}$$

;/ $\mathcal{P}hysicalQ(\{j_1, j_2, j_3\}, \{j_4, j_5, j_6\})$

07.40.06.0006.01

$$\left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{matrix} \right\} = (-1)^{j_1+j_2+j_4+j_5}$$

$$\left(\frac{\sqrt{(-j_1+j_2+j_3)!} \sqrt{(j_3-j_4+j_5)!} \sqrt{(j_2+j_4-j_6)!} \sqrt{(j_1+j_5-j_6)!} \sqrt{(-j_2+j_4+j_6)!} \sqrt{(j_1-j_5+j_6)!}}{\sqrt{(j_1+j_5+j_6+1)!} \sqrt{(j_2+j_4+j_6+1)!}} \right) / \left(\frac{\sqrt{(j_1+j_2-j_3)!} \sqrt{(j_1-j_2+j_3)!} \sqrt{(-j_3+j_4+j_5)!}}{\sqrt{(j_3+j_4-j_5)!} \sqrt{(-j_1+j_5+j_6)!} \sqrt{(j_2-j_4+j_6)!} \sqrt{(j_1+j_2+j_3+1)!} \sqrt{(j_3+j_4+j_5+1)!}} \right)$$

$$\sum_{k=\max(0, j_1-j_3+j_4-j_6)}^{\min(j_1+j_5-j_6, j_2+j_4-j_6)} \frac{(-1)^k (-j_1+j_5+j_6+k)! (j_2-j_4+j_6+k)! (j_1+j_3+j_4-j_6-k)!}{k! (j_1+j_5-j_6-k)! (j_2+j_4-j_6-k)! (-j_1+j_3-j_4+j_6+k)! (2j_6+1+k)!}$$

;/ $\mathcal{P}hysicalQ(\{j_1, j_2, j_3\}, \{j_4, j_5, j_6\})$

07.40.06.0007.01

$$\left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{matrix} \right\} =$$

$$(-1)^{j_2+j_3+j_5+j_6} \left(\sqrt{(j_1-j_2+j_3)!} \sqrt{(-j_1+j_2+j_3)!} \sqrt{(1+j_1+j_2+j_3)!} \sqrt{(-j_3+j_4+j_5)!} \sqrt{(j_1+j_5-j_6)!} \right.$$

$$\left. \sqrt{(j_2-j_4+j_6)!} \sqrt{(-j_2+j_4+j_6)!} \sqrt{(1+j_2+j_4+j_6)!} \right) / \left(\sqrt{(j_1+j_2-j_3)!} \sqrt{(j_3+j_4-j_5)!} \sqrt{(j_3-j_4+j_5)!} \right.$$

$$\left. \sqrt{(1+j_3+j_4+j_5)!} \sqrt{(j_2+j_4-j_6)!} \sqrt{(j_1-j_5+j_6)!} \sqrt{(-j_1+j_5+j_6)!} \sqrt{(1+j_1+j_5+j_6)!} \right)$$

$$\sum_{k=0}^{\min(-j_1+j_2+j_3, j_2-j_4+j_6)} \frac{(-1)^k (2j_2-k)! (j_2+j_3-j_5+j_6-k)! (j_2+j_3+j_5+j_6+1-k)!}{k! (-j_1+j_2+j_3-k)! (j_2-j_4+j_6-k)! (j_1+j_2+j_3+1-k)! (j_2+j_4+j_6+1-k)!} /;$$

PhysicalQ({j1, j2, j3}, {j4, j5, j6})

Generating functions

07.40.11.0001.01

$$\left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{matrix} \right\} = \left(\sqrt{(j_1+j_2+j_3+1)!} \sqrt{(j_3+j_4+j_5+1)!} \sqrt{(j_2+j_4+j_6+1)!} \sqrt{(j_1+j_5+j_6+1)!} \right) /$$

$$\left(\sqrt{(j_1+j_2-j_3)!} \sqrt{(j_1-j_2+j_3)!} \sqrt{(-j_1+j_2+j_3)!} \sqrt{(j_3+j_4-j_5)!} \sqrt{(j_3-j_4+j_5)!} \sqrt{(-j_3+j_4+j_5)!} \right.$$

$$\left. \sqrt{(j_2+j_4-j_6)!} \sqrt{(j_1+j_5-j_6)!} \sqrt{(j_2-j_4+j_6)!} \sqrt{(-j_2+j_4+j_6)!} \sqrt{(j_1-j_5+j_6)!} \sqrt{(-j_1+j_5+j_6)!} \right)$$

$$\left(\left[u^{2j_1}, v^{2j_2}, w^{2j_3}, x^{2j_4}, y^{2j_5}, z^{2j_6} \right] \frac{1}{(vw x + uv y x + uw z x + y z x + uw y + uv z + vw y z + 1)^2} \right) /;$$

PhysicalQ({j1, j2, j3}, {j4, j5, j6})

Identities

Recurrence identities

Consecutive neighbors

07.40.17.0001.01

$$\left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{matrix} \right\} = - \left((2j_3+3) ((j_1(1+j_1)+j_2(1+j_2)-(1+j_3)(2+j_3)) ((1+j_3)(2+j_3)-j_4(1+j_4)-j_5(1+j_5)) + \right.$$

$$\left. 2(j_1(1+j_1)j_4(1+j_4)+j_2(1+j_2)j_5(1+j_5)-(1+j_3)(2+j_3)j_6(1+j_6)) \right) \left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_3+1 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{matrix} \right\} +$$

$$(1+j_3) \sqrt{-1+j_1+j_2-j_3} \sqrt{2+j_1-j_2+j_3} \sqrt{2-j_1+j_2+j_3} \sqrt{3+j_1+j_2+j_3} \sqrt{2+j_3+j_4-j_5}$$

$$\sqrt{2+j_3-j_4+j_5} \sqrt{-1-j_3+j_4+j_5} \sqrt{3+j_3+j_4+j_5} \left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_3+2 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{matrix} \right\} \Bigg) /$$

$$\left((j_3+2) \sqrt{j_1+j_2-j_3} \sqrt{1+j_1-j_2+j_3} \sqrt{1-j_1+j_2+j_3} \sqrt{2+j_1+j_2+j_3} \sqrt{1+j_3+j_4-j_5} \right.$$

$$\left. \sqrt{1+j_3-j_4+j_5} \sqrt{-j_3+j_4+j_5} \sqrt{2+j_3+j_4+j_5} \right)$$

07.40.17.0002.01

$$\left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{matrix} \right\} = \left((2j_3 - 1)((j_1(1+j_1) + j_2(1+j_2) - (-1+j_3)j_3)((-1+j_3)j_3 - j_4(1+j_4) - j_5(1+j_5)) + \right. \\ \left. 2(j_1(1+j_1)j_4(1+j_4) + j_2(1+j_2)j_5(1+j_5) - (-1+j_3)j_3j_6(1+j_6)) \right) \left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_3 - 1 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{matrix} \right\} + \\ j_3 \sqrt{2+j_1+j_2-j_3} \sqrt{-1+j_1-j_2+j_3} \sqrt{-1-j_1+j_2+j_3} \sqrt{j_1+j_2+j_3} \sqrt{-1+j_3+j_4-j_5} \\ \sqrt{-1+j_3-j_4+j_5} \sqrt{2-j_3+j_4+j_5} \sqrt{j_3+j_4+j_5} \left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_3 - 2 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{matrix} \right\} \Big/ \\ \left((-j_3 - 1) \sqrt{1+j_1+j_2-j_3} \sqrt{j_1-j_2+j_3} \sqrt{-j_1+j_2+j_3} \sqrt{1+j_1+j_2+j_3} \sqrt{j_3+j_4-j_5} \right. \\ \left. \sqrt{j_3-j_4+j_5} \sqrt{1-j_3+j_4+j_5} \sqrt{1+j_3+j_4+j_5} \right)$$

Functional identities

Arguments changing by 1/2

07.40.17.0003.01

$$\left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{matrix} \right\} = - \frac{2j_3 \sqrt{j_2+j_4+j_6+1} \sqrt{j_2+j_4-j_6}}{\sqrt{j_1+j_2+j_3+1} \sqrt{-j_1+j_2+j_3} \sqrt{j_3+j_4+j_5+1} \sqrt{j_3+j_4-j_5}} \left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 - \frac{1}{2} & j_3 - \frac{1}{2} \\ j_4 - \frac{1}{2} & j_5 & j_6 \end{matrix} \right\} + \\ \frac{\sqrt{j_1+j_2-j_3+1} \sqrt{j_1-j_2+j_3} \sqrt{-j_3+j_4+j_5+1} \sqrt{j_3-j_4+j_5}}{\sqrt{j_1+j_2+j_3+1} \sqrt{-j_1+j_2+j_3} \sqrt{j_3+j_4+j_5+1} \sqrt{j_3+j_4-j_5}} \left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_3 - 1 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{matrix} \right\}$$

07.40.17.0004.01

$$\left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{matrix} \right\} = - \frac{\sqrt{j_1-j_2+j_3} \sqrt{j_3-j_4+j_5} \sqrt{j_1+j_5-j_6} \sqrt{j_1+j_5+j_6+1}}{(j_1-j_2-j_4+j_5) \sqrt{j_1+j_2+j_3+1} \sqrt{j_3+j_4+j_5+1}} \left\{ \begin{matrix} j_1 - \frac{1}{2} & j_2 & j_3 - \frac{1}{2} \\ j_4 & j_5 - \frac{1}{2} & j_6 \end{matrix} \right\} + \\ \frac{\sqrt{-j_1+j_2+j_3} \sqrt{j_3+j_4-j_5} \sqrt{j_2+j_4-j_6} \sqrt{j_2+j_4+j_6+1}}{(j_1-j_2-j_4+j_5) \sqrt{j_1+j_2+j_3+1} \sqrt{j_3+j_4+j_5+1}} \left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 - \frac{1}{2} & j_3 - \frac{1}{2} \\ j_4 - \frac{1}{2} & j_5 & j_6 \end{matrix} \right\}$$

07.40.17.0005.01

$$\left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{matrix} \right\} = - \left(\sqrt{j_1 + j_5 + j_6 + 1} \sqrt{j_1 - j_5 + j_6} \sqrt{j_2 + j_4 + j_6 + 1} \sqrt{-j_2 + j_4 + j_6} \sqrt{j_3 + j_4 + j_5 + 1} \sqrt{j_3 + j_4 - j_5} \right) /$$

$$\left((2j_4 + 1)(2j_6 + 1) \sqrt{j_1 + j_2 + j_3 + 1} \sqrt{j_1 - j_2 + j_3} \right) \left\{ \begin{matrix} j_1 - \frac{1}{2} & j_2 & j_3 - \frac{1}{2} \\ j_4 - \frac{1}{2} & j_5 & j_6 - \frac{1}{2} \end{matrix} \right\} -$$

$$\left(\sqrt{-j_1 + j_5 + j_6 + 1} \sqrt{j_1 + j_5 - j_6} \sqrt{j_2 - j_4 + j_6 + 1} \sqrt{j_2 + j_4 - j_6} \sqrt{j_3 + j_4 + j_5 + 1} \sqrt{j_3 + j_4 - j_5} \right) /$$

$$\left((2j_4 + 1)(2j_6 + 1) \sqrt{j_1 + j_2 + j_3 + 1} \sqrt{j_1 - j_2 + j_3} \right) \left\{ \begin{matrix} j_1 - \frac{1}{2} & j_2 & j_3 - \frac{1}{2} \\ j_4 - \frac{1}{2} & j_5 & j_6 + \frac{1}{2} \end{matrix} \right\} -$$

$$\left(\sqrt{j_1 + j_5 + j_6 + 1} \sqrt{j_1 - j_5 + j_6} \sqrt{j_2 + j_4 - j_6 + 1} \sqrt{j_2 - j_4 + j_6} \sqrt{-j_3 + j_4 + j_5 + 1} \sqrt{j_3 - j_4 + j_5} \right) /$$

$$\left((2j_4 + 1)(2j_6 + 1) \sqrt{j_1 + j_2 + j_3 + 1} \sqrt{j_1 - j_2 + j_3} \right) \left\{ \begin{matrix} j_1 - \frac{1}{2} & j_2 & j_3 - \frac{1}{2} \\ j_4 + \frac{1}{2} & j_5 & j_6 - \frac{1}{2} \end{matrix} \right\} +$$

$$\left(\sqrt{-j_1 + j_5 + j_6 + 1} \sqrt{j_1 + j_5 - j_6} \sqrt{j_2 + j_4 + j_6 + 2} \sqrt{-j_2 + j_4 + j_6 + 1} \sqrt{-j_3 + j_4 + j_5 + 1} \sqrt{j_3 - j_4 + j_5} \right) /$$

$$\left((2j_4 + 1)(2j_6 + 1) \sqrt{j_1 + j_2 + j_3 + 1} \sqrt{j_1 - j_2 + j_3} \right) \left\{ \begin{matrix} j_1 - \frac{1}{2} & j_2 & j_3 - \frac{1}{2} \\ j_4 + \frac{1}{2} & j_5 & j_6 + \frac{1}{2} \end{matrix} \right\}$$

Arguments changing by 1

07.40.17.0006.01

$$\left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{matrix} \right\} =$$

$$\left(-j_3 \sqrt{j_1 + j_2 + j_3 + 2} \sqrt{-j_1 + j_2 + j_3 + 1} \sqrt{j_1 - j_2 + j_3 + 1} \sqrt{j_1 + j_2 - j_3} \sqrt{j_3 + j_4 + j_5 + 2} \sqrt{j_3 - j_4 + j_5 + 1} \right.$$

$$\left. \sqrt{j_3 + j_4 - j_5 + 1} \sqrt{-j_3 + j_4 + j_5} \left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_3 + 1 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{matrix} \right\} - (j_3 + 1) \sqrt{j_1 + j_2 + j_3 + 1} \sqrt{-j_1 + j_2 + j_3} \sqrt{j_1 - j_2 + j_3} \right.$$

$$\left. \sqrt{j_1 + j_2 - j_3 + 1} \sqrt{j_3 + j_4 + j_5 + 1} \sqrt{j_3 - j_4 + j_5} \sqrt{j_3 + j_4 - j_5} \sqrt{-j_3 + j_4 + j_5 + 1} \left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_3 - 1 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{matrix} \right\} \right) /$$

$$((2j_3 + 1)(2(j_1(j_1 + 1)j_4(j_4 + 1) + j_2(j_2 + 1)j_5(j_5 + 1) - j_3(j_3 + 1)j_6(j_6 + 1))) +$$

$$(j_1(j_1 + 1) + j_2(j_2 + 1) - j_3(j_3 + 1))(j_3(j_3 + 1) - j_4(j_4 + 1) - j_5(j_5 + 1))))$$

Regge symmetries

07.40.17.0007.01

$$\left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} j_1 & \frac{1}{2}(-j_2 + j_3 + j_5 + j_6) & \frac{1}{2}(j_2 - j_3 + j_5 + j_6) \\ j_4 & \frac{1}{2}(j_2 + j_3 - j_5 + j_6) & \frac{1}{2}(j_2 + j_3 + j_5 - j_6) \end{matrix} \right\}$$

07.40.17.0008.01

$$\left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} \frac{1}{2}(-j_1 + j_3 + j_4 + j_6) & j_2 & \frac{1}{2}(j_1 - j_3 + j_4 + j_6) \\ \frac{1}{2}(j_1 + j_3 - j_4 + j_6) & j_5 & \frac{1}{2}(j_1 + j_3 + j_4 - j_6) \end{matrix} \right\}$$

07.40.17.0009.01

$$\left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} \frac{1}{2}(-j_1 + j_2 + j_4 + j_5) & \frac{1}{2}(j_1 - j_2 + j_4 + j_5) & j_3 \\ \frac{1}{2}(j_1 + j_2 - j_4 + j_5) & \frac{1}{2}(j_1 + j_2 + j_4 - j_5) & j_6 \end{matrix} \right\}$$

07.40.17.0010.01

$$\left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} \frac{1}{2}(j_1 + j_3 - j_4 + j_6) & \frac{1}{2}(j_1 + j_2 + j_4 - j_5) & \frac{1}{2}(j_2 + j_3 + j_5 - j_6) \\ \frac{1}{2}(-j_1 + j_3 + j_4 + j_6) & \frac{1}{2}(j_1 - j_2 + j_4 + j_5) & \frac{1}{2}(j_2 - j_3 + j_5 + j_6) \end{matrix} \right\}$$

07.40.17.0011.01

$$\left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} \frac{1}{2}(j_1 + j_2 - j_4 + j_5) & \frac{1}{2}(j_2 + j_3 - j_5 + j_6) & \frac{1}{2}(j_1 + j_3 + j_4 - j_6) \\ \frac{1}{2}(-j_1 + j_2 + j_4 + j_5) & \frac{1}{2}(-j_2 + j_3 + j_5 + j_6) & \frac{1}{2}(j_1 - j_3 + j_4 + j_6) \end{matrix} \right\}$$

All 144 symmetry relations

By combining the Regge symmetries with the permutation symmetries, we obtain all 144 symmetry relations for the 6 j symbols (including the identity).

07.40.17.0012.01

$$\left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{matrix} \right\}$$

07.40.17.0013.01

$$\left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} j_2 & j_1 & j_3 \\ j_5 & j_4 & j_6 \end{matrix} \right\}$$

07.40.17.0014.01

$$\left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} j_5 & j_4 & j_3 \\ j_2 & j_1 & j_6 \end{matrix} \right\}$$

07.40.17.0015.01

$$\left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} j_4 & j_5 & j_3 \\ j_1 & j_2 & j_6 \end{matrix} \right\}$$

07.40.17.0016.01

$$\left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} j_4 & j_2 & j_6 \\ j_1 & j_5 & j_3 \end{matrix} \right\}$$

07.40.17.0017.01

$$\left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} j_2 & j_4 & j_6 \\ j_5 & j_1 & j_3 \end{matrix} \right\}$$

07.40.17.0018.01

$$\left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} j_5 & j_1 & j_6 \\ j_2 & j_4 & j_3 \end{matrix} \right\}$$

07.40.17.0019.01

$$\left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} j_1 & j_5 & j_6 \\ j_4 & j_2 & j_3 \end{matrix} \right\}$$

07.40.17.0020.01

$$\left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} j_1 & j_3 & j_2 \\ j_4 & j_6 & j_5 \end{matrix} \right\}$$

07.40.17.0021.01

$$\left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} j_2 & j_3 & j_1 \\ j_5 & j_6 & j_4 \end{matrix} \right\}$$

07.40.17.0022.01

$$\left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} j_3 & j_1 & j_2 \\ j_6 & j_4 & j_5 \end{matrix} \right\}$$

07.40.17.0023.01

$$\begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} j_3 & j_2 & j_1 \\ j_6 & j_5 & j_4 \end{Bmatrix}$$

07.40.17.0024.01

$$\begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} j_1 & j_6 & j_5 \\ j_4 & j_3 & j_2 \end{Bmatrix}$$

07.40.17.0025.01

$$\begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} j_5 & j_6 & j_1 \\ j_2 & j_3 & j_4 \end{Bmatrix}$$

07.40.17.0026.01

$$\begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} j_6 & j_1 & j_5 \\ j_3 & j_4 & j_2 \end{Bmatrix}$$

07.40.17.0027.01

$$\begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} j_6 & j_5 & j_1 \\ j_3 & j_2 & j_4 \end{Bmatrix}$$

07.40.17.0028.01

$$\begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} j_4 & j_3 & j_5 \\ j_1 & j_6 & j_2 \end{Bmatrix}$$

07.40.17.0029.01

$$\begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} j_5 & j_3 & j_4 \\ j_2 & j_6 & j_1 \end{Bmatrix}$$

07.40.17.0030.01

$$\begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} j_3 & j_4 & j_5 \\ j_6 & j_1 & j_2 \end{Bmatrix}$$

07.40.17.0031.01

$$\begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} j_3 & j_5 & j_4 \\ j_6 & j_2 & j_1 \end{Bmatrix}$$

07.40.17.0032.01

$$\begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} j_4 & j_6 & j_2 \\ j_1 & j_3 & j_5 \end{Bmatrix}$$

07.40.17.0033.01

$$\begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} j_2 & j_6 & j_4 \\ j_5 & j_3 & j_1 \end{Bmatrix}$$

07.40.17.0034.01

$$\begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} j_6 & j_4 & j_2 \\ j_3 & j_1 & j_5 \end{Bmatrix}$$

07.40.17.0035.01

$$\begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} j_6 & j_2 & j_4 \\ j_3 & j_5 & j_1 \end{Bmatrix}$$

07.40.17.0036.01

$$\begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} j_1 & \frac{1}{2}(-j_2 + j_3 + j_5 + j_6) & \frac{1}{2}(j_2 - j_3 + j_5 + j_6) \\ j_4 & \frac{1}{2}(j_2 + j_3 - j_5 + j_6) & \frac{1}{2}(j_2 + j_3 + j_5 - j_6) \end{Bmatrix}$$

07.40.17.0059.01

$$\left\{ \begin{array}{ccc} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{ccc} \frac{1}{2}(j_2 + j_3 + j_5 - j_6) & \frac{1}{2}(-j_2 + j_3 + j_5 + j_6) & j_4 \\ \frac{1}{2}(j_2 - j_3 + j_5 + j_6) & \frac{1}{2}(j_2 + j_3 - j_5 + j_6) & j_1 \end{array} \right\}$$

07.40.17.0060.01

$$\left\{ \begin{array}{ccc} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{ccc} \frac{1}{2}(-j_1 + j_3 + j_4 + j_6) & j_2 & \frac{1}{2}(j_1 - j_3 + j_4 + j_6) \\ \frac{1}{2}(j_1 + j_3 - j_4 + j_6) & j_5 & \frac{1}{2}(j_1 + j_3 + j_4 - j_6) \end{array} \right\}$$

07.40.17.0061.01

$$\left\{ \begin{array}{ccc} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{ccc} j_2 & \frac{1}{2}(-j_1 + j_3 + j_4 + j_6) & \frac{1}{2}(j_1 - j_3 + j_4 + j_6) \\ j_5 & \frac{1}{2}(j_1 + j_3 - j_4 + j_6) & \frac{1}{2}(j_1 + j_3 + j_4 - j_6) \end{array} \right\}$$

07.40.17.0062.01

$$\left\{ \begin{array}{ccc} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{ccc} j_5 & \frac{1}{2}(j_1 + j_3 - j_4 + j_6) & \frac{1}{2}(j_1 - j_3 + j_4 + j_6) \\ j_2 & \frac{1}{2}(-j_1 + j_3 + j_4 + j_6) & \frac{1}{2}(j_1 + j_3 + j_4 - j_6) \end{array} \right\}$$

07.40.17.0063.01

$$\left\{ \begin{array}{ccc} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{ccc} \frac{1}{2}(j_1 + j_3 - j_4 + j_6) & j_5 & \frac{1}{2}(j_1 - j_3 + j_4 + j_6) \\ \frac{1}{2}(-j_1 + j_3 + j_4 + j_6) & j_2 & \frac{1}{2}(j_1 + j_3 + j_4 - j_6) \end{array} \right\}$$

07.40.17.0064.01

$$\left\{ \begin{array}{ccc} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{ccc} \frac{1}{2}(j_1 + j_3 - j_4 + j_6) & j_2 & \frac{1}{2}(j_1 + j_3 + j_4 - j_6) \\ \frac{1}{2}(-j_1 + j_3 + j_4 + j_6) & j_5 & \frac{1}{2}(j_1 - j_3 + j_4 + j_6) \end{array} \right\}$$

07.40.17.0065.01

$$\left\{ \begin{array}{ccc} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{ccc} j_2 & \frac{1}{2}(j_1 + j_3 - j_4 + j_6) & \frac{1}{2}(j_1 + j_3 + j_4 - j_6) \\ j_5 & \frac{1}{2}(-j_1 + j_3 + j_4 + j_6) & \frac{1}{2}(j_1 - j_3 + j_4 + j_6) \end{array} \right\}$$

07.40.17.0066.01

$$\left\{ \begin{array}{ccc} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{ccc} j_5 & \frac{1}{2}(-j_1 + j_3 + j_4 + j_6) & \frac{1}{2}(j_1 + j_3 + j_4 - j_6) \\ j_2 & \frac{1}{2}(j_1 + j_3 - j_4 + j_6) & \frac{1}{2}(j_1 - j_3 + j_4 + j_6) \end{array} \right\}$$

07.40.17.0067.01

$$\left\{ \begin{array}{ccc} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{ccc} \frac{1}{2}(-j_1 + j_3 + j_4 + j_6) & j_5 & \frac{1}{2}(j_1 + j_3 + j_4 - j_6) \\ \frac{1}{2}(j_1 + j_3 - j_4 + j_6) & j_2 & \frac{1}{2}(j_1 - j_3 + j_4 + j_6) \end{array} \right\}$$

07.40.17.0068.01

$$\left\{ \begin{array}{ccc} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{ccc} \frac{1}{2}(-j_1 + j_3 + j_4 + j_6) & \frac{1}{2}(j_1 - j_3 + j_4 + j_6) & j_2 \\ \frac{1}{2}(j_1 + j_3 - j_4 + j_6) & \frac{1}{2}(j_1 + j_3 + j_4 - j_6) & j_5 \end{array} \right\}$$

07.40.17.0069.01

$$\left\{ \begin{array}{ccc} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{ccc} j_2 & \frac{1}{2}(j_1 - j_3 + j_4 + j_6) & \frac{1}{2}(-j_1 + j_3 + j_4 + j_6) \\ j_5 & \frac{1}{2}(j_1 + j_3 + j_4 - j_6) & \frac{1}{2}(j_1 + j_3 - j_4 + j_6) \end{array} \right\}$$

07.40.17.0070.01

$$\left\{ \begin{array}{ccc} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{ccc} \frac{1}{2}(j_1 - j_3 + j_4 + j_6) & \frac{1}{2}(-j_1 + j_3 + j_4 + j_6) & j_2 \\ \frac{1}{2}(j_1 + j_3 + j_4 - j_6) & \frac{1}{2}(j_1 + j_3 - j_4 + j_6) & j_5 \end{array} \right\}$$

07.40.17.0071.01

$$\left\{ \begin{array}{ccc} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{ccc} \frac{1}{2}(j_1 - j_3 + j_4 + j_6) & j_2 & \frac{1}{2}(-j_1 + j_3 + j_4 + j_6) \\ \frac{1}{2}(j_1 + j_3 + j_4 - j_6) & j_5 & \frac{1}{2}(j_1 + j_3 - j_4 + j_6) \end{array} \right\}$$

07.40.17.0072.01

$$\left\{ \begin{array}{ccc} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{ccc} \frac{1}{2}(-j_1 + j_3 + j_4 + j_6) & \frac{1}{2}(j_1 + j_3 + j_4 - j_6) & j_5 \\ \frac{1}{2}(j_1 + j_3 - j_4 + j_6) & \frac{1}{2}(j_1 - j_3 + j_4 + j_6) & j_2 \end{array} \right\}$$

07.40.17.0073.01

$$\left\{ \begin{array}{ccc} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{ccc} j_5 & \frac{1}{2}(j_1 + j_3 + j_4 - j_6) & \frac{1}{2}(-j_1 + j_3 + j_4 + j_6) \\ j_2 & \frac{1}{2}(j_1 - j_3 + j_4 + j_6) & \frac{1}{2}(j_1 + j_3 - j_4 + j_6) \end{array} \right\}$$

07.40.17.0074.01

$$\left\{ \begin{array}{ccc} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{ccc} \frac{1}{2}(j_1 + j_3 + j_4 - j_6) & \frac{1}{2}(-j_1 + j_3 + j_4 + j_6) & j_5 \\ \frac{1}{2}(j_1 - j_3 + j_4 + j_6) & \frac{1}{2}(j_1 + j_3 - j_4 + j_6) & j_2 \end{array} \right\}$$

07.40.17.0075.01

$$\left\{ \begin{array}{ccc} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{ccc} \frac{1}{2}(j_1 + j_3 + j_4 - j_6) & j_5 & \frac{1}{2}(-j_1 + j_3 + j_4 + j_6) \\ \frac{1}{2}(j_1 - j_3 + j_4 + j_6) & j_2 & \frac{1}{2}(j_1 + j_3 - j_4 + j_6) \end{array} \right\}$$

07.40.17.0076.01

$$\left\{ \begin{array}{ccc} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{ccc} \frac{1}{2}(j_1 + j_3 - j_4 + j_6) & \frac{1}{2}(j_1 - j_3 + j_4 + j_6) & j_5 \\ \frac{1}{2}(-j_1 + j_3 + j_4 + j_6) & \frac{1}{2}(j_1 + j_3 + j_4 - j_6) & j_2 \end{array} \right\}$$

07.40.17.0077.01

$$\left\{ \begin{array}{ccc} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{ccc} j_5 & \frac{1}{2}(j_1 - j_3 + j_4 + j_6) & \frac{1}{2}(j_1 + j_3 - j_4 + j_6) \\ j_2 & \frac{1}{2}(j_1 + j_3 + j_4 - j_6) & \frac{1}{2}(-j_1 + j_3 + j_4 + j_6) \end{array} \right\}$$

07.40.17.0078.01

$$\left\{ \begin{array}{ccc} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{ccc} \frac{1}{2}(j_1 - j_3 + j_4 + j_6) & \frac{1}{2}(j_1 + j_3 - j_4 + j_6) & j_5 \\ \frac{1}{2}(j_1 + j_3 + j_4 - j_6) & \frac{1}{2}(-j_1 + j_3 + j_4 + j_6) & j_2 \end{array} \right\}$$

07.40.17.0079.01

$$\left\{ \begin{array}{ccc} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{ccc} \frac{1}{2}(j_1 - j_3 + j_4 + j_6) & j_5 & \frac{1}{2}(j_1 + j_3 - j_4 + j_6) \\ \frac{1}{2}(j_1 + j_3 + j_4 - j_6) & j_2 & \frac{1}{2}(-j_1 + j_3 + j_4 + j_6) \end{array} \right\}$$

07.40.17.0080.01

$$\left\{ \begin{array}{ccc} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{ccc} \frac{1}{2}(j_1 + j_3 - j_4 + j_6) & \frac{1}{2}(j_1 + j_3 + j_4 - j_6) & j_2 \\ \frac{1}{2}(-j_1 + j_3 + j_4 + j_6) & \frac{1}{2}(j_1 - j_3 + j_4 + j_6) & j_5 \end{array} \right\}$$

07.40.17.0081.01

$$\left\{ \begin{array}{ccc} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{ccc} j_2 & \frac{1}{2}(j_1 + j_3 + j_4 - j_6) & \frac{1}{2}(j_1 + j_3 - j_4 + j_6) \\ j_5 & \frac{1}{2}(j_1 - j_3 + j_4 + j_6) & \frac{1}{2}(-j_1 + j_3 + j_4 + j_6) \end{array} \right\}$$

07.40.17.0082.01

$$\left\{ \begin{array}{ccc} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{ccc} \frac{1}{2}(j_1 + j_3 + j_4 - j_6) & \frac{1}{2}(j_1 + j_3 - j_4 + j_6) & j_2 \\ \frac{1}{2}(j_1 - j_3 + j_4 + j_6) & \frac{1}{2}(-j_1 + j_3 + j_4 + j_6) & j_5 \end{array} \right\}$$

07.40.17.0083.01

$$\left\{ \begin{array}{ccc} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{ccc} \frac{1}{2}(j_1 + j_3 + j_4 - j_6) & j_2 & \frac{1}{2}(j_1 + j_3 - j_4 + j_6) \\ \frac{1}{2}(j_1 - j_3 + j_4 + j_6) & j_5 & \frac{1}{2}(-j_1 + j_3 + j_4 + j_6) \end{array} \right\}$$

07.40.17.0084.01

$$\left\{ \begin{array}{ccc} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{ccc} \frac{1}{2}(-j_1 + j_2 + j_4 + j_5) & \frac{1}{2}(j_1 - j_2 + j_4 + j_5) & j_3 \\ \frac{1}{2}(j_1 + j_2 - j_4 + j_5) & \frac{1}{2}(j_1 + j_2 + j_4 - j_5) & j_6 \end{array} \right\}$$

07.40.17.0085.01

$$\left\{ \begin{array}{ccc} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{ccc} \frac{1}{2}(j_1 - j_2 + j_4 + j_5) & \frac{1}{2}(-j_1 + j_2 + j_4 + j_5) & j_3 \\ \frac{1}{2}(j_1 + j_2 + j_4 - j_5) & \frac{1}{2}(j_1 + j_2 - j_4 + j_5) & j_6 \end{array} \right\}$$

07.40.17.0086.01

$$\left\{ \begin{array}{ccc} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{ccc} \frac{1}{2}(j_1 + j_2 + j_4 - j_5) & \frac{1}{2}(j_1 + j_2 - j_4 + j_5) & j_3 \\ \frac{1}{2}(j_1 - j_2 + j_4 + j_5) & \frac{1}{2}(-j_1 + j_2 + j_4 + j_5) & j_6 \end{array} \right\}$$

07.40.17.0087.01

$$\left\{ \begin{array}{ccc} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{ccc} \frac{1}{2}(j_1 + j_2 - j_4 + j_5) & \frac{1}{2}(j_1 + j_2 + j_4 - j_5) & j_3 \\ \frac{1}{2}(-j_1 + j_2 + j_4 + j_5) & \frac{1}{2}(j_1 - j_2 + j_4 + j_5) & j_6 \end{array} \right\}$$

07.40.17.0088.01

$$\left\{ \begin{array}{ccc} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{ccc} \frac{1}{2}(j_1 + j_2 - j_4 + j_5) & \frac{1}{2}(j_1 - j_2 + j_4 + j_5) & j_6 \\ \frac{1}{2}(-j_1 + j_2 + j_4 + j_5) & \frac{1}{2}(j_1 + j_2 + j_4 - j_5) & j_3 \end{array} \right\}$$

07.40.17.0089.01

$$\left\{ \begin{array}{ccc} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{ccc} \frac{1}{2}(j_1 - j_2 + j_4 + j_5) & \frac{1}{2}(j_1 + j_2 - j_4 + j_5) & j_6 \\ \frac{1}{2}(j_1 + j_2 + j_4 - j_5) & \frac{1}{2}(-j_1 + j_2 + j_4 + j_5) & j_3 \end{array} \right\}$$

07.40.17.0090.01

$$\left\{ \begin{array}{ccc} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{ccc} \frac{1}{2}(j_1 + j_2 + j_4 - j_5) & \frac{1}{2}(-j_1 + j_2 + j_4 + j_5) & j_6 \\ \frac{1}{2}(j_1 - j_2 + j_4 + j_5) & \frac{1}{2}(j_1 + j_2 - j_4 + j_5) & j_3 \end{array} \right\}$$

07.40.17.0091.01

$$\left\{ \begin{array}{ccc} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{ccc} \frac{1}{2}(-j_1 + j_2 + j_4 + j_5) & \frac{1}{2}(j_1 + j_2 + j_4 - j_5) & j_6 \\ \frac{1}{2}(j_1 + j_2 - j_4 + j_5) & \frac{1}{2}(j_1 - j_2 + j_4 + j_5) & j_3 \end{array} \right\}$$

07.40.17.0092.01

$$\left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} \frac{1}{2}(-j_1 + j_2 + j_4 + j_5) & j_3 & \frac{1}{2}(j_1 - j_2 + j_4 + j_5) \\ \frac{1}{2}(j_1 + j_2 - j_4 + j_5) & j_6 & \frac{1}{2}(j_1 + j_2 + j_4 - j_5) \end{matrix} \right\}$$

07.40.17.0093.01

$$\left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} \frac{1}{2}(j_1 - j_2 + j_4 + j_5) & j_3 & \frac{1}{2}(-j_1 + j_2 + j_4 + j_5) \\ \frac{1}{2}(j_1 + j_2 + j_4 - j_5) & j_6 & \frac{1}{2}(j_1 + j_2 - j_4 + j_5) \end{matrix} \right\}$$

07.40.17.0094.01

$$\left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} j_3 & \frac{1}{2}(-j_1 + j_2 + j_4 + j_5) & \frac{1}{2}(j_1 - j_2 + j_4 + j_5) \\ j_6 & \frac{1}{2}(j_1 + j_2 - j_4 + j_5) & \frac{1}{2}(j_1 + j_2 + j_4 - j_5) \end{matrix} \right\}$$

07.40.17.0095.01

$$\left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} j_3 & \frac{1}{2}(j_1 - j_2 + j_4 + j_5) & \frac{1}{2}(-j_1 + j_2 + j_4 + j_5) \\ j_6 & \frac{1}{2}(j_1 + j_2 + j_4 - j_5) & \frac{1}{2}(j_1 + j_2 - j_4 + j_5) \end{matrix} \right\}$$

07.40.17.0096.01

$$\left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} \frac{1}{2}(-j_1 + j_2 + j_4 + j_5) & j_6 & \frac{1}{2}(j_1 + j_2 + j_4 - j_5) \\ \frac{1}{2}(j_1 + j_2 - j_4 + j_5) & j_3 & \frac{1}{2}(j_1 - j_2 + j_4 + j_5) \end{matrix} \right\}$$

07.40.17.0097.01

$$\left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} \frac{1}{2}(j_1 + j_2 + j_4 - j_5) & j_6 & \frac{1}{2}(-j_1 + j_2 + j_4 + j_5) \\ \frac{1}{2}(j_1 - j_2 + j_4 + j_5) & j_3 & \frac{1}{2}(j_1 + j_2 - j_4 + j_5) \end{matrix} \right\}$$

07.40.17.0098.01

$$\left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} j_6 & \frac{1}{2}(-j_1 + j_2 + j_4 + j_5) & \frac{1}{2}(j_1 + j_2 + j_4 - j_5) \\ j_3 & \frac{1}{2}(j_1 + j_2 - j_4 + j_5) & \frac{1}{2}(j_1 - j_2 + j_4 + j_5) \end{matrix} \right\}$$

07.40.17.0099.01

$$\left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} j_6 & \frac{1}{2}(j_1 + j_2 + j_4 - j_5) & \frac{1}{2}(-j_1 + j_2 + j_4 + j_5) \\ j_3 & \frac{1}{2}(j_1 - j_2 + j_4 + j_5) & \frac{1}{2}(j_1 + j_2 - j_4 + j_5) \end{matrix} \right\}$$

07.40.17.0100.01

$$\left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} \frac{1}{2}(j_1 + j_2 - j_4 + j_5) & j_3 & \frac{1}{2}(j_1 + j_2 + j_4 - j_5) \\ \frac{1}{2}(-j_1 + j_2 + j_4 + j_5) & j_6 & \frac{1}{2}(j_1 - j_2 + j_4 + j_5) \end{matrix} \right\}$$

07.40.17.0101.01

$$\left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} \frac{1}{2}(j_1 + j_2 + j_4 - j_5) & j_3 & \frac{1}{2}(j_1 + j_2 - j_4 + j_5) \\ \frac{1}{2}(j_1 - j_2 + j_4 + j_5) & j_6 & \frac{1}{2}(-j_1 + j_2 + j_4 + j_5) \end{matrix} \right\}$$

07.40.17.0102.01

$$\left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} j_3 & \frac{1}{2}(j_1 + j_2 - j_4 + j_5) & \frac{1}{2}(j_1 + j_2 + j_4 - j_5) \\ j_6 & \frac{1}{2}(-j_1 + j_2 + j_4 + j_5) & \frac{1}{2}(j_1 - j_2 + j_4 + j_5) \end{matrix} \right\}$$

07.40.17.0147.01

$$\left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} \frac{1}{2}(j_1 - j_3 + j_4 + j_6) & \frac{1}{2}(-j_2 + j_3 + j_5 + j_6) & \frac{1}{2}(j_1 + j_2 - j_4 + j_5) \\ \frac{1}{2}(j_1 + j_3 + j_4 - j_6) & \frac{1}{2}(j_2 + j_3 - j_5 + j_6) & \frac{1}{2}(-j_1 + j_2 + j_4 + j_5) \end{matrix} \right\}$$

07.40.17.0148.01

$$\left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} \frac{1}{2}(-j_1 + j_2 + j_4 + j_5) & \frac{1}{2}(j_1 + j_3 + j_4 - j_6) & \frac{1}{2}(-j_2 + j_3 + j_5 + j_6) \\ \frac{1}{2}(j_1 + j_2 - j_4 + j_5) & \frac{1}{2}(j_1 - j_3 + j_4 + j_6) & \frac{1}{2}(j_2 + j_3 - j_5 + j_6) \end{matrix} \right\}$$

07.40.17.0149.01

$$\left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} \frac{1}{2}(-j_2 + j_3 + j_5 + j_6) & \frac{1}{2}(j_1 + j_3 + j_4 - j_6) & \frac{1}{2}(-j_1 + j_2 + j_4 + j_5) \\ \frac{1}{2}(j_2 + j_3 - j_5 + j_6) & \frac{1}{2}(j_1 - j_3 + j_4 + j_6) & \frac{1}{2}(j_1 + j_2 - j_4 + j_5) \end{matrix} \right\}$$

07.40.17.0150.01

$$\left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} \frac{1}{2}(j_1 + j_3 + j_4 - j_6) & \frac{1}{2}(-j_1 + j_2 + j_4 + j_5) & \frac{1}{2}(-j_2 + j_3 + j_5 + j_6) \\ \frac{1}{2}(j_1 - j_3 + j_4 + j_6) & \frac{1}{2}(j_1 + j_2 - j_4 + j_5) & \frac{1}{2}(j_2 + j_3 - j_5 + j_6) \end{matrix} \right\}$$

07.40.17.0151.01

$$\left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} \frac{1}{2}(j_1 + j_3 + j_4 - j_6) & \frac{1}{2}(-j_2 + j_3 + j_5 + j_6) & \frac{1}{2}(-j_1 + j_2 + j_4 + j_5) \\ \frac{1}{2}(j_1 - j_3 + j_4 + j_6) & \frac{1}{2}(j_2 + j_3 - j_5 + j_6) & \frac{1}{2}(j_1 + j_2 - j_4 + j_5) \end{matrix} \right\}$$

07.40.17.0152.01

$$\left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} \frac{1}{2}(-j_1 + j_2 + j_4 + j_5) & \frac{1}{2}(j_1 - j_3 + j_4 + j_6) & \frac{1}{2}(j_2 + j_3 - j_5 + j_6) \\ \frac{1}{2}(j_1 + j_2 - j_4 + j_5) & \frac{1}{2}(j_1 + j_3 + j_4 - j_6) & \frac{1}{2}(-j_2 + j_3 + j_5 + j_6) \end{matrix} \right\}$$

07.40.17.0153.01

$$\left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} \frac{1}{2}(j_2 + j_3 - j_5 + j_6) & \frac{1}{2}(j_1 - j_3 + j_4 + j_6) & \frac{1}{2}(-j_1 + j_2 + j_4 + j_5) \\ \frac{1}{2}(-j_2 + j_3 + j_5 + j_6) & \frac{1}{2}(j_1 + j_3 + j_4 - j_6) & \frac{1}{2}(j_1 + j_2 - j_4 + j_5) \end{matrix} \right\}$$

07.40.17.0154.01

$$\left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} \frac{1}{2}(j_1 - j_3 + j_4 + j_6) & \frac{1}{2}(-j_1 + j_2 + j_4 + j_5) & \frac{1}{2}(j_2 + j_3 - j_5 + j_6) \\ \frac{1}{2}(j_1 + j_3 + j_4 - j_6) & \frac{1}{2}(j_1 + j_2 - j_4 + j_5) & \frac{1}{2}(-j_2 + j_3 + j_5 + j_6) \end{matrix} \right\}$$

07.40.17.0155.01

$$\left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} \frac{1}{2}(j_1 - j_3 + j_4 + j_6) & \frac{1}{2}(j_2 + j_3 - j_5 + j_6) & \frac{1}{2}(-j_1 + j_2 + j_4 + j_5) \\ \frac{1}{2}(j_1 + j_3 + j_4 - j_6) & \frac{1}{2}(-j_2 + j_3 + j_5 + j_6) & \frac{1}{2}(j_1 + j_2 - j_4 + j_5) \end{matrix} \right\}$$

Summation

Infinite summation

07.40.23.0001.01

$$\sum_{j_{10}=-\infty}^{\infty} (2j_{10} + 1)(-1)^{j_1+j_2+j_3+j_4+j_5+j_6+j_7+j_8+j_9+j_{10}} \left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_{10} \\ j_3 & j_4 & j_7 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} j_3 & j_4 & j_{10} \\ j_5 & j_6 & j_8 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} j_5 & j_6 & j_{10} \\ j_2 & j_1 & j_9 \end{matrix} \right\} =$$

$$\left\{ \begin{matrix} j_7 & j_8 & j_9 \\ j_5 & j_1 & j_4 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} j_7 & j_8 & j_9 \\ j_6 & j_2 & j_3 \end{matrix} \right\}$$

Finite summation

Involving one 6 j symbol

07.40.23.0002.01

$$\sum_{k=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} (2k+1) \left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & k \\ j_1 & j_2 & j_3 \end{matrix} \right\} = (-1)^{2j_3} /; \text{TriangularQ}(j_1, j_2, j_3)$$

07.40.23.0003.01

$$\sum_{k=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} (-1)^{k+j_1+j_2} (2k+1) \left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & k \\ j_2 & j_1 & j_3 \end{matrix} \right\} = \delta_{j_3,0} \sqrt{2j_1+1} \sqrt{2j_2+1} /; 2j_1 \in \mathbb{N} \wedge 2j_2 \in \mathbb{N}$$

Involving two 6 j symbols

07.40.23.0004.01

$$\sum_{k=\max(|j_1-j_2|, |j_4-j_5|)}^{\min(j_1+j_2, j_4+j_5)} (2k+1)(2j_6+1) \left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & k \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & k \\ j_4 & j_5 & j'_6 \end{matrix} \right\} = \delta_{j_6, j'_6} /; \text{TriangularQ}(j_1, j_5, j_6) \wedge \text{TriangularQ}(j_2, j_4, j_6)$$

07.40.23.0005.01

$$\sum_{k=\max(|j_1-j_5|, |j_2-j_4|)}^{\min(j_1+j_5, j_2+j_4)} (2j_3+1)(2k+1) \left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & k \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j'_3 \\ j_4 & j_5 & k \end{matrix} \right\} = \delta_{j_3, j'_3} /; \text{TriangularQ}(j_1, j_2, j_3) \wedge \text{TriangularQ}(j_3, j_4, j_5)$$

07.40.23.0006.01

$$\sum_{k=\max(|j_1-j_2|, |j_3-j_4|)}^{\min(j_1+j_2, j_3+j_4)} (2k+1) \left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & k \\ j_3 & j_4 & j_5 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & k \\ j_3 & j_4 & j_6 \end{matrix} \right\} = \frac{\delta_{j_5, j_6}}{2j_5+1} /; \text{TriangularQ}(j_1, j_4, j_5) \wedge \text{TriangularQ}(j_2, j_3, j_5)$$

07.40.23.0007.01

$$\sum_{k=\max(|j_1-j_2|, |j_3-j_4|)}^{\min(j_1+j_2, j_3+j_4)} (-1)^{j_5+j_6+k} (2k+1) \left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & k \\ j_3 & j_4 & j_5 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & k \\ j_4 & j_3 & j_6 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} j_1 & j_3 & j_6 \\ j_2 & j_4 & j_5 \end{matrix} \right\}$$

Involving three 6 j symbols

07.40.23.0008.01

$$\sum_{k=\max(|j_1-j_2|, |j_3-j_4|, |j_6-j_7|)}^{\min(j_1+j_2, j_3+j_4, j_6+j_7)} (-1)^{2k} (2k+1) \left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & k \\ j_3 & j_4 & j_5 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} j_3 & j_4 & k \\ j_6 & j_7 & j_8 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} j_6 & j_7 & k \\ j_1 & j_2 & j_9 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} j_1 & j_7 & j_9 \\ j_4 & j_8 & j_6 \\ j_5 & j_3 & j_2 \end{matrix} \right\}$$

07.40.23.0009.01

$$\sum_{k=\max(|j_1-j_2|, |j_3-j_4|, |j_6-j_7|)}^{\min(j_1+j_2, j_3+j_4, j_6+j_7)} (-1)^k (2k+1) \left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & k \\ j_3 & j_4 & j_5 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} j_3 & j_4 & k \\ j_6 & j_7 & j_8 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} j_6 & j_7 & k \\ j_2 & j_1 & j_9 \end{matrix} \right\} =$$

$$(-1)^{-j_1-j_2-j_3-j_4-j_5-j_6-j_7-j_8-j_9} \left\{ \begin{matrix} j_5 & j_8 & j_9 \\ j_6 & j_1 & j_4 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} j_5 & j_8 & j_9 \\ j_7 & j_2 & j_3 \end{matrix} \right\}$$

Involving four 6 j symbols

07.40.23.0010.01

$$\sum_{k=\max(|j_6-j_7|,|j_3-j_4|)}^{\min(j_6+j_7, j_3+j_4)} \sum_{l=\max(|j_2-j_4|,|j_5-j_7|)}^{\min(j_2+j_4, j_5+j_7)} (2k+1)(2l+1) \left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & k & l \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} j_1 & j_5 & j_6 \\ j_7 & k & l \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} j_3 & j_7 & j_8 \\ j_6 & j_4 & k \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} j_2 & j_7 & j_9 \\ j_5 & j_4 & l \end{matrix} \right\} =$$

$$(-1)^{2j_3+2j_5} \left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_7 & j_8 & j_9 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} j_1 & j_5 & j_6 \\ j_4 & j_8 & j_9 \end{matrix} \right\}$$

07.40.23.0011.01

$$\sum_{k=\max(|j_3-j_4|,|j_6-j_7|)}^{\min(j_3+j_4, j_6+j_7)} \sum_{l=\max(|j_2-j_4|,|j_5-j_7|)}^{\min(j_2+j_4, j_5+j_7)} (-1)^{k+l} (2k+1)(2l+1) \left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & k & l \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} j_1 & j_5 & j_6 \\ j_7 & k & l \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} j_3 & j_6 & j_8 \\ j_7 & j_4 & k \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} j_2 & j_5 & j_9 \\ j_7 & j_4 & l \end{matrix} \right\} =$$

$$(-1)^{-j_1+j_2+j_3-j_4+j_5+j_6-j_7-j_8} \frac{\delta_{j_8, j_9}}{2j_8+1} \left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_8 & j_6 & j_5 \end{matrix} \right\} /; \text{TriangularQ}(j_4, j_7, j_8)$$

07.40.23.0012.01

$$\sum_{k_1=|j_4-j_7|}^{j_4+j_7} \sum_{k_2=\max(|j_5-j_7|,|j_3-k_1|)}^{\min(j_5+j_7, j_3+k_1)} \sum_{k_3=\max(|l_1-k_2|,|j_2-k_1|,|j_6-j_7|)}^{\min(j_1+k_2, j_2+k_1, j_6+j_7)} (-1)^{j_1+j_2+j_3+j_4+j_5+j_6+j_7+k_1+k_2+k_3} (2k_1+1)(2k_2+1)$$

$$(2k_3+1) \left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ k_1 & k_2 & k_3 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} j_1 & j_5 & j_6 \\ j_7 & k_3 & k_2 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} j_2 & j_6 & j_4 \\ j_7 & k_1 & k_3 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} j_3 & j_4 & j_5 \\ j_7 & k_2 & k_1 \end{matrix} \right\} = (2j_7+1) \left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{matrix} \right\}$$

Involving one 6 j symbol and one 9 j symbol

07.40.23.0013.01

$$\sum_{k=\max(|j_1-j_2|,|j_5-j_8|)}^{\min(j_1+j_2, j_5+j_8)} (2k+1) \left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & k \\ j_3 & j_4 & j_5 \\ j_6 & j_7 & j_8 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & k \\ j_5 & j_8 & j_9 \end{matrix} \right\} = (-1)^{2j_9} \left\{ \begin{matrix} j_1 & j_8 & j_9 \\ j_7 & j_3 & j_6 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} j_7 & j_3 & j_9 \\ j_5 & j_2 & j_4 \end{matrix} \right\}$$

07.40.23.0014.01

$$\sum_{k=\max(|j_1-j_2|,|j_5-j_8|)}^{\min(j_1+j_2, j_5+j_8)} (-1)^{k+j_1+j_2+j_3+j_4+j_5+j_6+j_7+j_8} (2k+1) \left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & k \\ j_3 & j_4 & j_5 \\ j_6 & j_7 & j_8 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & k \\ j_8 & j_5 & j_9 \end{matrix} \right\} = (-1)^{2j_9} \left\{ \begin{matrix} j_6 & j_4 & j_9 \\ j_5 & j_1 & j_3 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} j_6 & j_4 & j_9 \\ j_2 & j_8 & j_7 \end{matrix} \right\}$$

07.40.23.0015.01

$$\sum_{j_1=|j_4-j_5|}^{j_4+j_5} \sum_{j_2=|j_5-j_6|}^{j_5+j_6} \sum_{j_3=\max(|l_1-j_2|,|j_4-j_6|)}^{\min(j_1+j_2, j_4+j_6)} (2j_1+1)(2j_2+1)(2j_3+1) \left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \\ j_5 & j_6 & j_4 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_6 & j_4 & j_5 \end{matrix} \right\} = 1 /; \text{TriangularQ}(j_4, j_5, j_6)$$

Involving one 6 j symbol and two 9 j symbols

07.40.23.0016.01

$$\sum_{k=\max(|j_1-j_2|,|j_5-j_8|)}^{\min(j_1+j_2, j_5+j_8)} \sum_{l=\max(|j_1-j_9|,|j_8-j_{11}|)}^{\min(j_1+j_9, j_8+j_{11})} (2k+1)(2l+1) \left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & k \\ j_3 & j_4 & j_5 \\ j_6 & j_7 & j_8 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & k \\ j_9 & j_{10} & j_5 \\ l & j_{11} & j_8 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} j_1 & j_9 & l \\ j_{11} & j_8 & j_{12} \end{matrix} \right\} =$$

$$\left\{ \begin{matrix} j_1 & j_8 & j_{12} \\ j_7 & j_3 & j_6 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} j_7 & j_3 & j_{12} \\ j_5 & j_2 & j_4 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} j_5 & j_2 & j_{12} \\ j_{11} & j_9 & j_{10} \end{matrix} \right\}$$

07.40.23.0017.01

$$\sum_{j_1+j_2}^{j_1+j_2} \sum_{j_2+j_7}^{j_2+j_7} \sum_{\min(j_3+j_4, j_7+k_1, j_1+k_2)}^{\min(j_3+j_4, j_7+k_1, j_1+k_2)} (-1)^{k_1+k_2-j_5-j_8} (2k_1+1)(2k_2+1)(2k_3+1)$$

$$k_1=|j_1-j_2|, k_2=|j_2-j_7|, k_3=\max(|j_3-j_4|, |j_7-k_1|, |j_1-k_2|)$$

$$\left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & k_1 \\ j_3 & j_4 & k_3 \\ j_5 & j_6 & j_7 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} j_7 & j_2 & k_2 \\ j_3 & j_4 & k_3 \\ j_8 & j_9 & j_1 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & k_1 \\ j_7 & k_3 & k_2 \end{matrix} \right\} = \frac{\delta_{j_6, j_9}}{2j_6+1} \left\{ \begin{matrix} j_5 & j_6 & j_7 \\ j_8 & j_3 & j_1 \end{matrix} \right\}; \text{TriangularQ}(j_2, j_4, j_6)$$

07.40.23.0018.01

$$\sum_{j_4+j_5}^{j_4+j_5} \sum_{j_2+j_5}^{j_2+j_5} \sum_{\min(j_4+j_7, j_3+k_1, j_6+k_2)}^{\min(j_4+j_7, j_3+k_1, j_6+k_2)} (-1)^{-j_1+j_7-j_8+k_1} (2k_1+1)(2k_2+1)(2k_3+1)$$

$$k_1=|j_4-j_5|, k_2=|j_2-j_5|, k_3=\max(|j_4-j_7|, |j_3-k_1|, |j_6-k_2|)$$

$$\left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & k_1 \\ j_6 & k_2 & k_3 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} j_2 & j_5 & k_2 \\ j_4 & j_7 & k_3 \\ j_8 & j_9 & j_6 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} j_3 & k_1 & k_3 \\ j_4 & j_7 & j_5 \end{matrix} \right\} = \frac{\delta_{j_3, j_9}}{2j_3+1} \left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_8 & j_6 & j_4 \end{matrix} \right\}; \text{TriangularQ}(j_3, j_5, j_7)$$

Involving one 6 j symbol and three 9 j symbols

07.40.23.0019.01

$$\sum_{j_1+j_2}^{j_1+j_2} \sum_{\min(j_3+j_4, j_7+k_1)}^{\min(j_3+j_4, j_7+k_1)} \sum_{\min(j_{11}+j_{12}, j_{10}+k_1, j_{15}+k_2)}^{\min(j_{11}+j_{12}, j_{10}+k_1, j_{15}+k_2)} (2k_1+1)(2k_2+1)(2k_3+1) \left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & k_1 \\ j_3 & j_4 & k_2 \\ j_5 & j_6 & j_7 \end{matrix} \right\}$$

$$k_1=|j_1-j_2|, k_2=\max(|j_3-j_4|, |j_7-k_1|), k_3=\max(|j_{11}-j_{12}|, |j_{10}-k_1|, |j_{15}-k_2|)$$

$$\left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & k_1 \\ j_8 & j_9 & j_{10} \\ j_{11} & j_{12} & k_3 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} j_{13} & j_{14} & j_{15} \\ j_3 & j_4 & k_2 \\ j_{11} & j_{12} & k_3 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} j_{15} & j_{10} & j_7 \\ k_1 & k_2 & k_3 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} j_{13} & j_{14} & j_{15} \\ j_8 & j_9 & j_{10} \\ j_5 & j_6 & j_7 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} j_{13} & j_8 & j_5 \\ j_1 & j_3 & j_{11} \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} j_{14} & j_9 & j_6 \\ j_2 & j_4 & j_{12} \end{matrix} \right\}$$

Involving two 6 j symbols and one 9 j symbol

07.40.23.0020.01

$$\sum_{\min(j_3+j_5, j_4+j_9)}^{\min(j_3+j_5, j_4+j_9)} \sum_{\min(j_2+j_9, j_5+j_7)}^{\min(j_2+j_9, j_5+j_7)} (-1)^{k+l+2} j_1-j_6-j_8 (2k+1)(2l+1) \left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_9 & k \\ j_7 & l & j_5 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} j_4 & j_9 & k \\ j_3 & j_5 & j_6 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} j_2 & j_9 & l \\ j_7 & j_5 & j_8 \end{matrix} \right\} =$$

$$k=\max(|j_3-j_5|, |j_4-j_9|), l=\max(|j_2-j_9|, |j_5-j_7|)$$

$$\left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \\ j_7 & j_8 & j_9 \end{matrix} \right\}$$

07.40.23.0021.01

$$\sum_{\min(j_3+j_5, j_4+j_9)}^{\min(j_3+j_5, j_4+j_9)} \sum_{\min(j_2+j_9, j_5+j_7)}^{\min(j_2+j_9, j_5+j_7)} (2k+1)(2l+1) \left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_9 & k \\ j_7 & l & j_5 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} j_4 & j_9 & k \\ j_5 & j_3 & j_6 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} j_2 & j_9 & l \\ j_5 & j_7 & j_8 \end{matrix} \right\} =$$

$$k=\max(|j_3-j_5|, |j_4-j_9|), l=\max(|j_2-j_9|, |j_5-j_7|)$$

$$\frac{(-1)^{2j_6}}{2j_6+1} \delta_{j_6, j_8} \left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_6 & j_4 & j_7 \end{matrix} \right\}; \text{TriangularQ}(j_5, j_6, j_9)$$

07.40.23.0022.01

$$\sum_{j_1+j_2}^{j_1+j_2} \sum_{\min(j_3+j_4, k+j_7)}^{\min(j_3+j_4, k+j_7)} (2k+1)(2l+1) \left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & k \\ j_3 & j_4 & l \\ j_5 & j_6 & j_7 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & k \\ l & j_7 & j_8 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} j_3 & j_4 & l \\ j_2 & j_8 & j_9 \end{matrix} \right\} = \frac{(-1)^{2j_8}}{2j_6+1} \delta_{j_6, j_9} \left\{ \begin{matrix} j_5 & j_9 & j_7 \\ j_8 & j_1 & j_3 \end{matrix} \right\};$$

$$\text{TriangularQ}(j_2, j_4, j_6)$$

07.40.23.0023.01

$$\sum_{k_1=|j_4-j_5|}^{j_4+j_5} \sum_{k_2=|j_2-j_5|}^{j_2+j_5} \sum_{k_3=\max(|j_5-j_7|, |j_3-k_1|, |j_6-k_2|)}^{\min(j_5+j_7, j_3+k_1, j_6+k_2)} (2k_1+1)(2k_2+1)(2k_3+1) \begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & k_1 \\ j_6 & k_2 & k_3 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} j_3 & k_1 & k_3 \\ j_5 & j_7 & j_4 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} j_6 & k_2 & k_3 \\ j_5 & j_7 & j_2 \end{Bmatrix} =$$

$$(-1)^{2j_7} (2j_5+1) \begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_7 & j_4 & j_6 \end{Bmatrix}$$

Involving two 6 j symbols and two 9 j symbols

07.40.23.0024.01

$$\sum_{k_1=|j_1-j_4|}^{j_1+j_4} \sum_{k_2=\max(|j_2-j_5|, |j_7-k_1|)}^{\min(j_2+j_5, j_7+k_1)} \sum_{k_3=\max(|j_1-j_8|, |j_{12}-k_1|, |j_{11}-k_2|)}^{\min(j_1+j_8, j_{12}+k_1, j_{11}+k_2)} (-1)^{k_3} (2k_1+1)$$

$$(2k_2+1)(2k_3+1) \begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \\ k_1 & k_2 & j_7 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} j_8 & j_5 & j_9 \\ j_1 & j_2 & j_{10} \\ k_3 & k_2 & j_{11} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} j_1 & j_4 & k_1 \\ j_{12} & k_3 & j_8 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} k_1 & k_2 & j_7 \\ j_{11} & j_{12} & k_3 \end{Bmatrix} =$$

$$(-1)^{j_2+2j_3-j_4+j_7+j_9} \frac{\delta_{j_3, j_{10}}}{2j_3+1} \begin{Bmatrix} j_{12} & j_9 & j_6 \\ j_3 & j_7 & j_{11} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} j_{12} & j_9 & j_6 \\ j_5 & j_4 & j_8 \end{Bmatrix} ; \text{TriangularQ}(j_1, j_2, j_3)$$

07.40.23.0025.01

$$\sum_{k_1=\max(|j_1-j_2|, |j_7-j_8|)}^{\min(j_1+j_2, j_7+j_8)} \sum_{k_2=\max(|j_3-j_4|, |j_9-j_{10}|)}^{\min(j_3+j_4, j_9+j_{10})} \sum_{k_3=\max(|j_5-j_6|, |k_1-k_2|)}^{\min(j_5+j_6, k_1+k_2)} (-1)^{2k_2-k_3} (2k_1+1)(2k_2+1)(2k_3+1) \begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & k_1 \\ j_3 & j_4 & k_2 \\ j_5 & j_6 & k_3 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} j_7 & j_8 & k_1 \\ j_9 & j_{10} & k_2 \\ j_6 & j_5 & k_3 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & k_1 \\ j_7 & j_8 & j_{11} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} j_3 & j_4 & k_2 \\ j_9 & j_{10} & j_{12} \end{Bmatrix} = (-1)^{-j_2+j_3-j_8+j_9} \frac{\delta_{j_{11}, j_{12}}}{2j_{11}+1} \begin{Bmatrix} j_1 & j_3 & j_5 \\ j_{10} & j_8 & j_{11} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} j_2 & j_4 & j_6 \\ j_9 & j_7 & j_{11} \end{Bmatrix}$$

07.40.23.0026.01

$$\sum_{k_1=\max(|j_1-j_2|, |j_7-j_{11}|)}^{\min(j_1+j_2, j_7+j_{11})} \sum_{k_2=\max(|j_5-k_1|, |j_7-j_9|)}^{\min(j_5+k_1, j_7+j_9)} \sum_{k_3=\max(|j_2-j_4|, |j_6-k_2|)}^{\min(j_2+j_4, j_6+k_2)} (-1)^{-j_1-j_2-j_4+j_5-j_6-j_9-j_{12}+k_2}$$

$$(2k_1+1)(2k_2+1)(2k_3+1) \begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & k_1 \\ j_3 & j_4 & j_5 \\ j_6 & k_3 & k_2 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} j_2 & j_7 & j_8 \\ j_4 & j_9 & j_{10} \\ k_3 & k_2 & j_6 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & k_1 \\ j_7 & j_{11} & j_{12} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} j_7 & j_9 & k_2 \\ j_5 & k_1 & j_{11} \end{Bmatrix} =$$

$$\frac{(-1)^{2j_{10}}}{2j_{12}+1} \delta_{j_8, j_{12}} \begin{Bmatrix} j_{11} & j_3 & j_{10} \\ j_6 & j_{12} & j_1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} j_{11} & j_3 & j_{10} \\ j_4 & j_9 & j_5 \end{Bmatrix} ; \text{TriangularQ}(j_2, j_7, j_{12})$$

Involving three 6 j symbols and one 9 j symbol

07.40.23.0027.01

$$\sum_{k=\max(|j_1-j_2|, |j_9-j_{10}|)}^{\min(j_1+j_2, j_9-j_{10})} \sum_{l=\max(|j_3-j_4|, |j_8-j_{10}|, |k-j_7|)}^{\min(j_3+j_4, j_8+j_{10}, k+j_7)} (-1)^l (2k+1)(2l+1) \begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & k \\ j_3 & j_4 & l \\ j_5 & j_6 & j_7 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} k & l & j_7 \\ j_8 & j_9 & j_{10} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & k \\ j_9 & j_{10} & j_{11} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} j_3 & j_4 & l \\ j_8 & j_{10} & j_{12} \end{Bmatrix} = (-1)^{j_1-j_2+j_4-j_5+j_7-j_8+j_{11}} \begin{Bmatrix} j_{11} & j_2 & j_9 \\ j_{12} & j_4 & j_8 \\ j_5 & j_6 & j_7 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} j_1 & j_3 & j_5 \\ j_{12} & j_{11} & j_{10} \end{Bmatrix}$$

07.40.23.0028.01

$$\sum_{k_1=\max(|j_1-j_4|,|j_6-j_7|)}^{\min(j_1+j_4, j_6+j_7)} \sum_{k_2=\max(|j_2-j_5|,|j_3-j_7|)}^{\min(j_2+j_5, j_3+j_7)} \sum_{k_3=\max(|j_3-j_6|,|k_1-k_2|)}^{\min(j_3+j_6, k_1+k_2)} (2k_1+1)$$

$$(2k_2+1)(2k_3+1) \begin{Bmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \\ j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \\ j_3 & j_6 & j_7 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} k_1 & j_4 & j_1 \\ j_8 & j_7 & j_6 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} k_2 & j_5 & j_2 \\ j_9 & j_3 & j_7 \end{Bmatrix} =$$

$$\frac{(-1)^{2j_1+2j_5} \delta_{j_1, j_9} \delta_{j_5, j_8}}{(2j_1+1)(2j_5+1)} /; \text{TriangularQ}(j_1, j_2, j_3) \wedge \text{TriangularQ}(j_4, j_5, j_6) \wedge \text{TriangularQ}(j_1, j_5, j_7)$$

07.40.23.0029.01

$$\sum_{k_1=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} \sum_{k_2=\max(|j_3-j_4|,|j_7-k_1|)}^{\min(j_3+j_4, j_7+k_1)} \sum_{k_3=\max(|j_1-j_4|,|j_8-k_1|,|j_9-k_2|)}^{\min(j_1+j_4, j_8+k_1, j_9+k_2)} (-1)^{2k_3} (2k_1+1)$$

$$(2k_2+1)(2k_3+1) \begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & k_1 \\ j_3 & j_4 & k_2 \\ j_5 & j_6 & j_7 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & k_1 \\ j_8 & k_3 & j_4 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} j_3 & j_4 & k_2 \\ k_3 & j_9 & j_1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} j_9 & j_8 & j_7 \\ k_1 & k_2 & k_3 \end{Bmatrix} =$$

$$\frac{\delta_{j_5, j_9} \delta_{j_6, j_8}}{(2j_5+1)(2j_6+1)} /; \text{TriangularQ}(j_1, j_3, j_5) \wedge \text{TriangularQ}(j_2, j_4, j_6) \wedge \text{TriangularQ}(j_5, j_6, j_7)$$

Operations

Limit operation

07.40.25.0001.01

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^{2(n-j_1-j_4)} \sqrt{2n+2j_6+1} \begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ n+j_4 & n+j_5 & n+j_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_6-j_5 & j_4-j_6 & j_5-j_4 \end{Bmatrix}$$

Representations through more general functions

Through hypergeometric functions

Involving ${}_p\tilde{F}_q$

07.40.26.0001.01

$$\begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{Bmatrix} = \frac{(-1)^{e-1} \pi \csc(e\pi) \Phi(f-a, f-b, f-c, f-d, g-a, g-b, g-c, g-d)}{\Phi(1-a, 1-b, 1-c, 1-d, a-e+1, b-e+1, c-e+1, d-e+1)} {}_4\tilde{F}_3(a, b, c, d; e, f, g; 1) /;$$

$$a+b+c+d-e-f-g = -1 \bigwedge \Phi(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6, z_7, z_8) = \prod_{k=1}^8 \sqrt{\Gamma(z_k)} \bigwedge$$

$$a = -j_1 - j_2 + j_3 \bigwedge b = j_3 - j_4 - j_5 \bigwedge c = -j_2 - j_4 + j_6 \bigwedge d = -j_1 - j_5 + j_6 \bigwedge$$

$$e = -j_1 - j_2 - j_4 - j_5 - 1 \bigwedge f = -j_1 + j_3 - j_4 + j_6 + 1 \bigwedge g = -j_2 + j_3 - j_5 + j_6 + 1$$

Involving ${}_pF_q$

07.40.26.0002.01

$$\left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{matrix} \right\} = \frac{(-1)^{e-1} \pi \csc(e\pi) \Phi(f-a, f-b, f-c, f-d, g-a, g-b, g-c, g-d)}{\Gamma(e) \Gamma(f) \Gamma(g) \Phi(1-a, 1-b, 1-c, 1-d, a-e+1, b-e+1, c-e+1, d-e+1)} {}_4F_3(a, b, c, d; e, f, g; 1) /;$$

$$a+b+c+d-e-f-g = -1 \bigwedge \Phi(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6, z_7, z_8) = \prod_{k=1}^8 \sqrt{\Gamma(z_k)} \bigwedge$$

$$a = -j_1 - j_2 + j_3 \bigwedge b = j_3 - j_4 - j_5 \bigwedge c = -j_2 - j_4 + j_6 \bigwedge d = -j_1 - j_5 + j_6 \bigwedge$$

$$e = -j_1 - j_2 - j_4 - j_5 - 1 \bigwedge f = -j_1 + j_3 - j_4 + j_6 + 1 \bigwedge g = -j_2 + j_3 - j_5 + j_6 + 1$$

07.40.26.0004.01

$$\left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{matrix} \right\} = (-1)^{j_1+j_2+j_4+j_5} \left(\sqrt{(j_1-j_2+j_3)!} \sqrt{(-j_1+j_2+j_3)!} \sqrt{(j_3+j_4-j_5)!} \sqrt{(j_3-j_4+j_5)!} \right. \\ \left. \sqrt{(j_2-j_4+j_6)!} \sqrt{(-j_2+j_4+j_6)!} \sqrt{(j_1-j_5+j_6)!} \sqrt{(-j_1+j_5+j_6)!} (1+j_1+j_2+j_4+j_5)! \right) / \\ \left(\sqrt{(j_1+j_2-j_3)!} \sqrt{(1+j_1+j_2+j_3)!} \sqrt{(-j_3+j_4+j_5)!} \sqrt{(1+j_3+j_4+j_5)!} \sqrt{(j_2+j_4-j_6)!} \right. \\ \left. \sqrt{(j_1+j_5-j_6)!} \sqrt{(1+j_2+j_4+j_6)!} \sqrt{(1+j_1+j_5+j_6)!} (-j_1+j_3-j_4+j_6)! (-j_2+j_3-j_5+j_6)! \right) \\ {}_4F_3(-j_1-j_2+j_3, j_3-j_4-j_5, -j_1-j_5+j_6, -j_2-j_4+j_6; -j_1-j_2-j_4-j_5-1, -j_1+j_3-j_4+j_6+1, \\ -j_2+j_3-j_5+j_6+1; 1) /; \mathcal{PhysicalQ}(\{j_1, j_2, j_3\}, \{j_4, j_5, j_6\})$$

07.40.26.0005.01

$$\left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{matrix} \right\} = (-1)^{j_1+j_3+j_4+j_6} \left(\sqrt{(-j_1+j_2+j_3)!} \sqrt{(1+j_1+j_2+j_3)!} \sqrt{(j_3-j_4+j_5)!} \sqrt{(1+j_3+j_4+j_5)!} \sqrt{(j_2+j_4-j_6)!} \right. \\ \left. \sqrt{(j_1+j_5-j_6)!} \sqrt{(j_2-j_4+j_6)!} (j_1-j_3+j_4+j_6)! \sqrt{(-j_1+j_5+j_6)!} \right) / \\ \left(\sqrt{(j_1+j_2-j_3)!} \sqrt{(j_1-j_2+j_3)!} \sqrt{(j_3+j_4-j_5)!} (-j_1+j_2-j_4+j_5)! \sqrt{(-j_3+j_4+j_5)!} \right. \\ \left. (1+j_2+j_3+j_5-j_6)! \sqrt{(-j_2+j_4+j_6)!} \sqrt{(1+j_2+j_4+j_6)!} \sqrt{(j_1-j_5+j_6)!} \sqrt{(1+j_1+j_5+j_6)!} \right) \\ {}_4F_3(-j_1+j_2+j_3+1, j_3-j_4+j_5+1, -j_1+j_5-j_6, j_2-j_4-j_6; -j_1+j_3-j_4-j_6, \\ -j_1+j_2-j_4+j_5+1, j_2+j_3+j_5-j_6+2; 1) /; \mathcal{PhysicalQ}(\{j_1, j_2, j_3\}, \{j_4, j_5, j_6\})$$

07.40.26.0006.01

$$\left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{matrix} \right\} = (-1)^{j_1+j_3+j_4+j_6} \left(\sqrt{(j_1+j_2-j_3)!} \sqrt{(-j_1+j_2+j_3)!} (j_1-j_2+j_4+j_5)! \sqrt{(j_2+j_4-j_6)!} \sqrt{(j_2-j_4+j_6)!} (1+j_1+j_3+j_4+j_6)! \right. \\ \left. (-j_2+j_3+j_5+j_6)! \right) / \left(\sqrt{(j_1-j_2+j_3)!} \sqrt{(1+j_1+j_2+j_3)!} \sqrt{(j_3+j_4-j_5)!} \sqrt{(j_3-j_4+j_5)!} \right. \\ \left. \sqrt{(-j_3+j_4+j_5)!} \sqrt{(1+j_3+j_4+j_5)!} \sqrt{(j_1+j_5-j_6)!} \sqrt{(-j_2+j_4+j_6)!} \right. \\ \left. \sqrt{(1+j_2+j_4+j_6)!} \sqrt{(j_1-j_5+j_6)!} \sqrt{(-j_1+j_5+j_6)!} \sqrt{(1+j_1+j_5+j_6)!} \right) \\ {}_4F_3(-j_1+j_2-j_3, j_2-j_4-j_6, -j_1-j_5-j_6-1, -j_3-j_4-j_5-1; -j_1+j_2-j_4-j_5, \\ j_2-j_3-j_5-j_6, -j_1-j_3-j_4-j_6-1; 1) /; \mathcal{PhysicalQ}(\{j_1, j_2, j_3\}, \{j_4, j_5, j_6\})$$

07.40.26.0007.01

$$\left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{matrix} \right\} =$$

$$(-1)^{j_1+j_2+j_4+j_5} \left(\sqrt{(-j_1+j_2+j_3)!} \sqrt{(j_3-j_4+j_5)!} \sqrt{(j_2-j_4+j_6)!} \sqrt{(-j_2+j_4+j_6)!} \sqrt{(1+j_2+j_4+j_6)!} \right.$$

$$\left. \sqrt{(j_1-j_5+j_6)!} \sqrt{(-j_1+j_5+j_6)!} \sqrt{(1+j_1+j_5+j_6)!} (j_1+j_3+j_4-j_6)! \right) /$$

$$\left(\sqrt{(j_1+j_2-j_3)!} \sqrt{(j_1-j_2+j_3)!} \sqrt{(1+j_1+j_2+j_3)!} \sqrt{(j_3+j_4-j_5)!} \sqrt{(-j_3+j_4+j_5)!} \right.$$

$$\left. \sqrt{(1+j_3+j_4+j_5)!} \sqrt{(j_2+j_4-j_6)!} \sqrt{(j_1+j_5-j_6)!} (-j_1+j_3-j_4+j_6)! (2j_6+1)! \right)$$

$${}_4F_3(-j_1-j_5+j_6, -j_2-j_4+j_6, -j_1+j_5+j_6+1, j_2-j_4+j_6+1; -j_1-j_3-j_4+j_6, -j_1+j_3-j_4+j_6+1, 2j_6+2; 1) /;$$

PhysicalQ({j₁, j₂, j₃}, {j₄, j₅, j₆})

07.40.26.0008.01

$$\left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{matrix} \right\} =$$

$$(-1)^{j_2+j_3+j_5+j_6} \left(\sqrt{(j_1-j_2+j_3)!} \sqrt{(-j_3+j_4+j_5)!} \sqrt{(j_1+j_5-j_6)!} \sqrt{(-j_2+j_4+j_6)!} (2j_2)! (j_2+j_3-j_5+j_6)! \right.$$

$$\left. (1+j_2+j_3+j_5+j_6)! \right) / \left(\sqrt{(j_1+j_2-j_3)!} \sqrt{(-j_1+j_2+j_3)!} \sqrt{(1+j_1+j_2+j_3)!} \right.$$

$$\left. \sqrt{(j_3+j_4-j_5)!} \sqrt{(j_3-j_4+j_5)!} \sqrt{(1+j_3+j_4+j_5)!} \sqrt{(j_2+j_4-j_6)!} \sqrt{(j_2-j_4+j_6)!} \right.$$

$$\left. \sqrt{(1+j_2+j_4+j_6)!} \sqrt{(j_1-j_5+j_6)!} \sqrt{(-j_1+j_5+j_6)!} \sqrt{(1+j_1+j_5+j_6)!} \right)$$

$${}_4F_3(j_1-j_2-j_3, -j_2+j_4-j_6, -j_1-j_2-j_3-1, -j_2-j_4-j_6-1; -2j_2, -j_2-j_3+j_5-j_6, -j_2-j_3-j_5-j_6-1; 1) /;$$

PhysicalQ({j₁, j₂, j₃}, {j₄, j₅, j₆})

Through Meijer G

Classical cases for the direct function itself

07.40.26.0003.01

$$\left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{matrix} \right\} = (-1)^{-j_1-j_2-j_4-j_5} \left(\sqrt{(j_1-j_2+j_3)!} \sqrt{(-j_1+j_2+j_3)!} \sqrt{(j_3+j_4-j_5)!} \sqrt{(j_3-j_4+j_5)!} \sqrt{(j_2-j_4+j_6)!} \right.$$

$$\left. \sqrt{(-j_2+j_4+j_6)!} \sqrt{(j_1-j_5+j_6)!} \sqrt{(-j_1+j_5+j_6)!} (-j_1+j_3-j_4+j_6)! (j_1+j_2+j_4+j_5+1)! \right) /$$

$$\left(\sqrt{(j_1+j_2-j_3)!} \sqrt{(j_1+j_2+j_3+1)!} \sqrt{(-j_3+j_4+j_5)!} \sqrt{(j_3+j_4+j_5+1)!} \sqrt{(j_2+j_4-j_6)!} \sqrt{(j_1+j_5-j_6)!} \right.$$

$$\left. \sqrt{(j_2+j_4+j_6+1)!} \sqrt{(j_1+j_5+j_6+1)!} (-j_1-j_2+j_3-1)! (j_3-j_4-j_5-1)!^2 (-j_1-j_5+j_6-1)! \right)$$

$$G_{4,4}^{1,4} \left(-1 \left| \begin{matrix} j_1+j_2-j_3+1, -j_3+j_4+j_5+1, j_2+j_4-j_6+1, j_1+j_5-j_6+1 \\ 0, j_1+j_2+j_4+j_5+2, j_1-j_3+j_4-j_6, j_2-j_3+j_5-j_6 \end{matrix} \right. \right) /; \textit{PhysicalQ}(\{j_1, j_2, j_3\}, \{j_4, j_5, j_6\})$$

Representations through equivalent functions

With related functions

07.40.27.0001.01

$$\left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{matrix} \right\} = \sum_{m_1=-j_1}^{j_1} \sum_{\hat{m}_1=-j_1}^{j_1} \sum_{m_2=-j_2}^{j_2} \sum_{\hat{m}_2=-j_2}^{j_2} \sum_{m_3=-j_3}^{j_3} \sum_{\hat{m}_3=-j_3}^{j_3} \sum_{m_4=-j_4}^{j_4} \sum_{\hat{m}_4=-j_4}^{j_4} \sum_{m_5=-j_5}^{j_5} \sum_{\hat{m}_5=-j_5}^{j_5} \sum_{m_6=-j_6}^{j_6} \sum_{\hat{m}_6=-j_6}^{j_6} (-1)^{j_1+j_2+j_3+j_4+j_5+j_6+m_1+m_2+m_3+m_4+m_5+m_6} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 & j_5 & j_6 \\ \hat{m}_1 & m_2 & \hat{m}_6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_4 & j_2 & j_6 \\ \hat{m}_4 & \hat{m}_2 & m_6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_4 & j_5 & j_3 \\ \hat{m}_4 & \hat{m}_5 & \hat{m}_3 \end{pmatrix} \delta_{m_1, -\hat{m}_1} \delta_{m_2, -\hat{m}_2} \delta_{m_3, -\hat{m}_3} \delta_{m_4, -\hat{m}_4} \delta_{m_5, -\hat{m}_5} \delta_{m_6, -\hat{m}_6}$$

Zeros

07.40.30.0001.01

$$\left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{matrix} \right\} = 0 /; j_1 = \frac{1}{2}(abc + def + adg) - \frac{1}{2} \wedge j_2 = \frac{1}{2}(abc + beh + ghi) - \frac{1}{2} \wedge j_3 = \frac{1}{2}(def + adg + beh + ghi) - 1 \wedge j_4 = \frac{1}{2}(adg + h ig) \wedge j_5 = \frac{1}{2}(def + beh) \wedge j_6 = \frac{1}{2}(abc + adg + beh) - \frac{1}{2} \wedge abc - fic + def + adg + beh + ghi = 0 \wedge a \in \mathbb{N}^+ \wedge b \in \mathbb{N}^+ \wedge c \in \mathbb{N}^+ \wedge d \in \mathbb{N}^+ \wedge e \in \mathbb{N}^+ \wedge f \in \mathbb{N}^+ \wedge g \in \mathbb{N}^+ \wedge h \in \mathbb{N}^+ \wedge i \in \mathbb{N}^+$$

Theorems

Representation as a magic square

For a physically realizable $6j$ symbol $\left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{matrix} \right\}$ the following 4×4 matrix is a magic square, all rows and columns summing up to $2(j_1 + j_2 + j_3 + j_4 + j_5 + j_6)$:

$$\begin{pmatrix} -j_3 + j_4 + j_5 & j_1 - j_5 + j_6 & j_3 - j_4 + j_5 & j_1 + j_2 + j_3 + j_4 + j_5 + j_6 \\ j_1 - j_2 + j_3 & j_2 + j_4 - j_6 & j_1 + j_2 + j_3 + 2(j_4 + j_5 + j_6) & j_1 + j_2 + j_3 \\ -j_1 + j_2 + j_3 & j_2 + j_4 + j_6 + 2(j_1 + j_3 + j_5) & j_1 + j_2 - j_3 & j_3 + j_4 - j_5 \\ j_3 + j_4 + j_5 + 2(j_1 + j_2 + j_6) & -j_1 + j_5 + j_6 & j_3 + j_4 - j_5 & j_1 + j_2 + j_3 + j_4 + j_5 + j_6 \end{pmatrix}$$

History

E.P. Wigner (1931); G. Racah (1942).

References

L.C. Biedenharn and J.D. Louck, *Angular Momentum in Quantum Physics*, Addison-Wesley, Reading, 1981.

L.C. Biedenharn and J.D. Louck, *The Racah-Wigner Algebra in Quantum Theory*, Addison-Wesley, Reading, 1981.

M.E. Rose, *Elementary Theory of Angular Momentum*, Dover, New York, 1995.

D.A. Varshalovich, A.N. Moskalev and V.K. Khersonskii, *Quantum Theory of Angular Momentum*, World Scientific, Singapore, 1988.

Copyright

This document was downloaded from functions.wolfram.com, a comprehensive online compendium of formulas involving the special functions of mathematics. For a key to the notations used here, see <http://functions.wolfram.com/Notations/>.

Please cite this document by referring to the functions.wolfram.com page from which it was downloaded, for example:

<http://functions.wolfram.com/Constants/E/>

To refer to a particular formula, cite functions.wolfram.com followed by the citation number.

e.g.: <http://functions.wolfram.com/01.03.03.0001.01>

This document is currently in a preliminary form. If you have comments or suggestions, please email comments@functions.wolfram.com.

© 2001-2008, Wolfram Research, Inc.